ISSN 2686-9667

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

ISSN 2686-9667

Том 25
№ 131
2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 25, № 131, 2020

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам (распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

СОДЕРЖАНИЕ

Выпуск содержит статьи участников Международной научной конференции «Колмогоровские чтения – IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2020)», посвященной 70-летию со дня рождения А.И. Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина. Конференция проводится при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html;
http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-76133 от 03 июля 2019 г.
Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2020. – Т. 25, № 131. – 96 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131

Подписано в печать 28.09.2020. Дата выхода в свет
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 12,0. Усл. печ. л. 11,16. Тираж 1000 экз. Заказ № 20218. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 25, no. 131, 2020

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission for publication of principal scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF no. 90-p of December 28, 2018)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

The issue contains articles of the participants of the International scientific conference "Kolmogorov Readings – IX. General Control Problems and their Applications (GCP-2020)", dedicated to the 70-th birth anniversary of A.I. Bulgakov and to the 90-th anniversary of the Institute of Mathematics, Physics and Information Technologies of Derzhavin Tambov State University. The conference is organized with the financial support of the FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences".

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Derzhavin Tambov State University"
(33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html;
http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate is ПИ no. ФС77-76133 of July 3, 2019
Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency "Rospechat" is 83372

Editor M.I. Filatova
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina
Technical editor M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2020. – Vol. 25, no. 131. – 96 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131

Podpisano v pechat' 28.09.2020. Data vykhoda v svet
Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.
Pech. list 12,0. Usl. pech. list 11,16. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 20218. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region,
FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy"
of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-249-262

УДК 517.98, 517.968.7

Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора с производными от функционалов в банаховых пространствах

Елена Юрьевна ГРАЖДАНЦЕВА

ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»

664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1

Fundamental operator-function of an integro-differential operator with derivatives of functionals in Banach spaces

Elena Yu. GRAZHDANTSEVA

Irkutsk State University

1 Karla Marksa St., Irkutsk 664003, Russian Federation

Аннотация. В работе рассматривается обобщенный интегро-дифференциальный оператор с производными от функционалов, который имеет в своей конструкции обратимый оператор в линейной части, свободной от производных. При исследовании используются ранее полученные результаты в области фундаментальных оператор-функций в банаховых пространствах, а также свойства обобщенных функций, операторов, функционалов. Для интегро-дифференциального оператора с производными от функционалов в банаховых пространствах получена фундаментальная оператор-функция в терминологии жордановых наборов и выявлены условия существования этой фундаментальной оператор-функции.

Ключевые слова: банахово пространство; обобщенная функция; фундаментальная оператор-функция; жорданов набор

Для цитирования: *Гражданцева Е.Ю.* Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора с производными от функционалов в банаховых пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 249–262. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-249-262.

Abstract. In this paper, we consider a generalized integro-differential operator with derivatives of functionals, which has in its construction an invertible operator in the linear part free of derivatives. The research uses previously obtained results in the field of fundamental operator functions in Banach spaces, as well as the properties of generalized functions, operators, and functionals. For an integro-differential operator with derivatives of functionals in Banach spaces, a fundamental operator-function in the terminology of Jordan sets is obtained and the conditions for the existence of this fundamental operator-function are revealed.

Keywords: Banach space; generalized function; fundamental operator-function; Jordan set

For citation: Grazhdantseva E.Yu. Fundamental'naya operator-funktsiya integro-differentsial'nogo operatora s proizvodnymi ot funktsionalov v banakhovykh prostranstvakh [Fundamental operator-function of an integro-differential operator with derivatives of functionals in Banach spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 249–262. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-249-262. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Интерес к дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям вызван задачами математической физики в областях гидродинамики, электротехники, физики плазмы и т. п. Особенность таких задач заключается в том, что в главной части уравнения присутствует необратимый (вырожденный) оператор.

Благодаря свойствам функции Дирака (функция $\delta(t)$) и функции Хевисайда (функция $\theta(t)$) дифференциальное (или интегро-дифференциальное) уравнение можно представить в виде свертки соответствующего уравнению обобщенного дифференциального оператора с неизвестной функцией. Например, дифференциальное уравнение

$$B\frac{du}{dt} + Au = f,$$

где $u = u(t)$ — неизвестная функция, а $f = f(t)$ — известная функция, представимо в виде

$$(B\delta^{'}(t) + A\delta(t)) * u(t) = f(t).$$

Один из методов решения подобных уравнений заключается в применении развивающейся теории фундаментальных оператор-функций (см., например, [1–3]). Исследование фундаментальной оператор-функции для соответствующего уравнению оператора позволяет выявить условия существования как непрерывного, так и обобщенного решения исследуемого уравнения, а также восстановить само решение.

В работе рассматривается обобщенный интегро-дифференциальный оператор с производными от функционалов вида

$$L^N = \sum_{l=1}^{s} \langle \bullet, \alpha_l \rangle \, a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t), \tag{0.1}$$

где A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2; a_l, $l = \overline{1, s}$, — элементы пространства E_2; α_l, $l = \overline{1, s}$, — элементы банахова пространства E_1^*; $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2; $K(t)$ — замкнутый линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, причем $\overline{D(K)} = E_1$, $D(K)$ не зависит от t и $K(t)$ — сильно непрерывная на $D(K)$ достаточно гладкая функция; $\delta(t)$ — функция Дирака; $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Этот оператор соответствует интегро-дифференциальному уравнению с производными от функционалов вида

$$\sum_{l=1}^{s} \left\langle u^{(N)}(t), \alpha_l \right\rangle a_l = Au(t) + \int_0^t K(t-\tau)u(\tau)d\tau + f(t).$$

1. Вспомогательные сведения и обозначения

О п р е д е л е н и е 1.1. [1] Обобщенной функцией (распределением) со значениями в банаховом пространстве называют всякий линейный непрерывный функционал на основном пространстве $K(R^N; E^*)$.

При этом множество всех обобщенных функций, определенных на основном пространстве обозначают через $K'(E)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. [2] Действием оператор-функции $K(t) \in L(E_1, E_2)$, здесь $L(E_1, E_2)$ — пространство сильно непрерывных оператор-функций класса C^∞, на обобщенную функцию $v(t) \in K'(E_1)$, называют обобщенную функцию $K(t)v(t) \in K'(E_2)$, действующую на основные функции $s(t) \in K(E_2^*)$ по правилу

$$(K(t)v(t), s(t)) = (v(t), K^*(t)s(t)).$$

О п р е д е л е н и е 1.3. [2] Сверткой обобщенной оператор-функции $K(t)f(t)$ и обобщенной функции $v(t) \in K_+^{'}(E_1)$ называют обобщенную функцию $K(t)f(t) * v(t) \in K_+^{'}(E_2)$, действующую по формуле

$$(K(t)f(t) * v(t), s(t)) = (f(t), (K^*(t)s(t+y))), \ \ \forall s(t) \in K(E_2^*).$$

З а м е ч а н и е 1.1. $K(t)\theta(t) * b(t)\theta(t) = (K(t) * b(t))\theta(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, используя определение свертки, получим

$$(K(t)\theta(t) * b(t)\theta(t), \varphi(t)) = (K(t)\theta(t), (b(y)\theta(y), \varphi(t+y))) =$$
$$= (K(t)\theta(t), \int_0^\infty b(y)\varphi(t+y)dy) = (K(t)\theta(t), \int_0^\infty b(x-t)\varphi(x)dx) =$$
$$= \int_0^\infty K(t) \left(\int_t^\infty b(x-t)\varphi(x)dx \right) dt = \int_0^\infty \left(\int_0^x K(t)b(x-t)dt \right) \varphi(x)dx =$$
$$= \int_0^\infty (K(x) * b(x))\varphi(x)dx = (\theta(x), (K(x) * b(x))\varphi(x)) =$$
$$= ((K(x) * b(x))\theta(x), \varphi(x)) = ((K(t) * b(t))\theta(t), \varphi(t)).$$

□

З а м е ч а н и е 1.2. Пусть $K(t) \in C^k(E)$. Тогда дифференцирование оператор-функции $K(t)\theta(t)$ происходит по правилу

$$(K(t)\theta(t))^{(k)} = K^{(k)}(t)\theta(t) + \sum_{m=0}^{k-1} K^{(m)}(0)\delta^{(k-m)}(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $a(t) \in C^{'}(E)$ и $\theta(t)$ — функция Хевисайда, то производная произведения $a(t)\theta(t)$ находится по формуле (см., например, [2]) $(a(t)\theta(t))^{'} = a^{'}(t)\theta(t) + a(0)\delta(t)$. Тогда для произведения $K(t)\theta(t)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(K(t)\theta(t))^{'} = K^{'}(t)\theta(t) + K(0)\delta(t),$$

$$(K(t)\theta(t))'' = (K'(t)\theta(t) + K(0)\delta(t))' = K''(t)\theta(t) + K'(0)\delta(t) + K(0)\delta'(t) =$$
$$= K''(t)\theta(t) + \sum_{m}^{1} K^{(m)}(0)\delta^{(1-m)},$$
$$(K(t)\theta(t))^{(3)} = (K''(t)\theta(t) + K'(0)\delta(t) + K(0)\delta'(t))' =$$
$$= K^{(3)}(t)\theta(t) + K''(0)\delta(t) + K'(0)\delta'(t) + K(0)\delta'' = K^{(3)}(t)\theta(t) + \sum_{m}^{2} K^{(m)}(0)\delta^{(2-m)},$$

и т. д. По индукции получим

$$(K(t)\theta(t))^{(k)} = K^{(k)}(t)\theta(t) + \sum_{m=0}^{k-1} K^{(m)}(0)\delta^{(k-m)}(t).$$

$\square$

З а м е ч а н и е 1.3. $(U(\Gamma t))^{(N)} = \Gamma U(\Gamma t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $U(\Gamma t) = \sum\limits_{q=1}^{\infty} \Gamma \dfrac{t^{qN-1}}{(qN-1)!}$, получим

$$(U(\Gamma t))^{(N)} = \left(I\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \Gamma\frac{t^{2N-1}}{(2N-1)!} + \Gamma^2\frac{t^{3N-1}}{(3N-1)!} + \cdots\right)^{(N)} =$$
$$= \left(I\frac{t^{N-2}}{(N-2)!} + \Gamma\frac{t^{2N-2}}{(2N-2)!} + \Gamma^2\frac{t^{3N-2}}{(3N-2)!} + \cdots\right)^{(N-1)} =$$
$$= \left(I\frac{t^{N-3}}{(N-3)!} + \Gamma\frac{t^{2N-3}}{(2N-3)!} + \Gamma^2\frac{t^{3N-3}}{(3N-3)!} + \cdots\right)^{(N-2)} = \cdots =$$
$$= \left(I + \Gamma\frac{t^{N}}{(N)!} + \Gamma^2\frac{t^{2N}}{(2N)!} + \cdots\right)' =$$
$$= \left(\Gamma\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \Gamma^2\frac{t^{2N-1}}{(2N-1)!} + \cdots\right) = \Gamma\sum_{q=1}^{\infty}\frac{t^{qN-1}}{(qN-1)!} = \Gamma U(\Gamma t).$$

$\square$

О п р е д е л е н и е 1.4. [2] Фундаментальной оператор-функцией оператора L на классе K'_+ называют обобщенную оператор-функцию $E(t)$, удовлетворяющую равенствам

$$L * E(t) * u(t) = u(t), \ \ \forall u(t) \in K'_+(E_2),$$
$$E(t) * L * w(t) = w(t), \ \ \forall w(t) \in K'_+(E_1).$$

где $K'_+(E)$ — пространство обобщенных функций со значениями в банаховом пространстве с ограниченным слева носителем.

Пусть

1) оператор B — это матрица размерности $(n \times n)$ вида

$$B = \begin{pmatrix} \langle A^{-1}a_1, \alpha_1 \rangle & \dots & \langle A^{-1}a_n, \alpha_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A^{-1}a_1, \alpha_n \rangle & \dots & \langle A^{-1}a_n, \alpha_n \rangle \end{pmatrix};$$

2) тождественный оператор I — единичная матрица размерности $n \times n$;

3) набор $\{\varphi_i, i = \overline{1,n}\}$ — базис пространство нулей оператора B; $\varphi_i \in E_1$;

4) набор $\{\psi_i, i = \overline{1,n}\}$ — базис пространства нулей оператора B^*; $\psi_i \in E_2$;

5) элементы $\{\varphi_i^{(j)}, i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\}$ — полный I-жорданов набор оператора B;

6) элементы $\{\psi_i^{(j)}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,p_i}\}$ — полный I^*- жорданов набор оператора B^*;

7) операторы I^* и B^* — сопряженные операторы для операторов I и B соответственно;

8) оператор Треногина–Шмидта Γ для оператора B — матрица, определяемая по формуле

$$\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \bullet, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1},$$

где $\gamma_i \in E_1^*$, $i = \overline{1,n}$, $z_i \in E_2$, $i = \overline{1,n}$ — биортогональные системы элементов для φ_i и ψ_i соответственно [4];

9) оператор $\tilde{Q}$ — матрица размерности $(n \times n)$, у которой элементы $\tilde{Q}_{pq}$, $p = \overline{1,n}$, $q = \overline{1,n}$, находятся по формуле

$$\tilde{Q}_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{p_i} \left\langle \bullet, \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)}, & p = q; \end{cases}$$

10) оператор-функция $\Gamma e^{\Gamma t}$ определяется по формуле

$$\Gamma e^{\Gamma t} = \Gamma \sum_{q=1}^{\infty} \Gamma \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}.$$

Введем в рассмотрение оператор-функции

$$H(t) = A^{-1} \sum_{l=1}^{n} (K(t) * b_l(t)) \theta(t) a_l + A^{-1} \sum_{l=1}^{n} h_l K(t) \theta(t) a_l - \\ - A^{-1} K(t) \theta(t) - A^{-1} \sum_{l=1}^{n} f_l K^{(k+1)}(t) \theta(t) a_l \qquad (1.1)$$

и

$$\tilde{H}(t) = A^{-1} \sum_{l=1}^{n} (b_l(t)) * K(t) \theta(t) a_l + A^{-1} \sum_{l=1}^{n} h_l K(t) \theta(t) a_l - \\ - A^{-1} K(t) \theta(t) - A^{-1} \sum_{l=1}^{n} f_l K^{(k+1)}(t) \theta(t) a_l, \qquad (1.2)$$

где b_l — элементы вектор-столбца $\vec{b}(t) = \Gamma^2 e^{\Gamma t}(I - \tilde{Q})\vec{d}$; h_l — элементы вектор-столбца $\vec{h} = \Gamma(I - \tilde{Q})\vec{d}$; $f_l = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum\limits_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{p_i-k+1-j}\Big)d_l$, — элементы вектор-столбца $\vec{f}$; $d_l = \langle A^{-1}\bullet, \alpha_l\rangle$, — элементы вектор-столбца $\vec{d}$; $l = \overline{1,n}$. Также введем резольвенты $R(t)$ и $\tilde{R}(t)$, для которых оператор-функции (1.1) и (1.2) являются ядрами соответственно.

2. Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора с производными первого порядка от функционалов

Пусть $K(t) \equiv 0$, $N = 1$. Тогда оператор (0.1) примет вид

$$\sum_{l=1}^{n}\langle\bullet, \alpha_l\rangle a_l\delta^{'}(t) - A\delta(t).$$

Фундаментальной оператор-функцией этого оператора при обратимости оператора A является оператор-функция вида (см. [3, с. 78])

$$M(t) = A^{-1}\sum_{i=1}^{n} c_i^{'}(t)a_i - A^{-1}\delta(t),$$

где $c_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ — элементы обобщенной вектор-функции $\vec{c}(t) = U_1(t) * \vec{g}(t)$,

$$U_1(t) = \Gamma e^{\Gamma t}(I - \tilde{Q})\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{j}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\delta^{(k)}(t), \quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix}\langle\bullet, \alpha_1\rangle\\ \cdots\\ \langle\bullet, \alpha_n\rangle\end{pmatrix}A^{-1}\delta(t),$$

операторы $\Gamma, B, \tilde{Q}$, а также наборы $\Big\{\varphi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\Big\}$, $\Big\{\psi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\Big\}$ описаны выше (пункт 1.). Учитывая введенные обозначения, оператор-функция $M(t)$ записывается в виде

$$M(t) = A^{-1}\sum_{l=1}^{n} b_l(t)\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n} h_l\delta(t)a_l - A^{-1}\sum_{l=1}^{n} f_l\delta^{(k+1)}(t) - A^{-1}\delta(t).$$

Лемма 2.1. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условиям*

$$K^{(m)}(0) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, p, \quad p = \max_{i=\overline{1,n}}(p_i). \tag{2.1}$$

Тогда оператор-функция $H(t)$ вида (1.1) может быть представлена в виде

$$H(t) = K(t)\theta(t) * M(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $K(t)$ удовлетворяет условиям (2.1), для оператор-функции $H(t)$ вида (1.2) справедлива следующая цепочка равенств:

$$A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t) * b_l(t))\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n} h_l K(t)\theta(t)a_l - A^{-1}K(t)\theta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n} f_l K^{(k+1)}\theta(t)a_l =$$

$$= A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)\theta(t)) * (b_l(t)\theta(t))a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n} h_l(K(t)\theta(t)) * \delta(t)a_l -$$
$$-A^{-1}(K(t)\theta(t)) * \delta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n} f_l\left(K^{(k+1)}\theta(t) + \sum_{m=0}^{k} K^{(m)}(0)\delta^{(k-m)}(t)\right)a_l.$$

А, согласно свойству дифференцирования произведения непрерывной функции с функцией Хевисайда (см. замечания 1.1, 1.2), получившееся представление оператор-функции $H(t)$ можно записать в виде

$$K(t)\theta(t) * \left(A^{-1}\sum_{l=1}^{n} b_l(t)\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n} h_l\delta(t)a_l - A^{-1}\delta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n} f_l\delta^{(k+1)}(t))a_l\right) =$$
$$= K(t)\theta(t) * M(t).$$

Таким образом, действительно $H(t) = K(t)\theta(t) * M(t)$. □

Лемма 2.2. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условиям (2.1). Тогда оператор-функция $\tilde{H}(t)$ вида (1.2) может быть представлена в виде*

$$\tilde{H}(t) = M(t) * K(t)\theta(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.1. □

Теорема 2.1. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условиям (2.1). Тогда интегро-дифференциальный оператор вида*

$$\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l\rangle\, a_l\delta'(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)$$

на классе K'_+ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$E(t) = M(t) * (R(t) + I\delta(t)) = (\tilde{R}(t) + I\delta(t)) * M(t),$$

где $M(t)$ — фундаментальная оператор-функция дифференциального оператора

$$\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l\rangle\, a_l\delta'(t) - A\delta(t),$$

$R(t)$ — резольвента ядра $H(t)$ вида (1.1), $\tilde{R}(t)$ — резольвента ядра $\tilde{H}(t)$ вида (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая введенные обозначения и вид интегро-дифференциального оператора L, для свертки $L * E(t)$ при $E(t) = M(t) * (R(t) + I\delta(t))$, согласно лемме 2.1, получим:

$$L * E(t) = L * (M(t) * (R(t) + I\delta(t))) =$$
$$= \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l\rangle\, a_l\delta'(t) - A\delta(t)\Big) * M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) -$$
$$-K(t)\theta(t) * M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) = I\delta(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) - R(t) = I\delta(t).$$

А в силу леммы 2.2 для свертки $E(t) * L$ получим:

$$E(t) * L = M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) * L =$$
$$= M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta'(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)\Big) =$$
$$= M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta'(t) - A\delta(t)\Big) - M(t) * \big(R(t) + I\delta(t)\big) * K(t)\theta(t) =$$
$$= \big(\tilde{R}(t) + I\delta(t)\big) * M(t) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta'(t) - A\delta(t)\Big) - \tilde{R}(t) =$$
$$= \big(\tilde{R}(t) + I\delta(t)\big) * I\delta(t) - \tilde{R}(t) = I\delta(t).$$

Таким образом, доказано, что оператор-функция $E(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, а именно $L * E(t) * u(t) = u(t)$, $\forall u(t) \in K'_+(E_2)$, $E(t) * L * w(t) = w(t)$, $\forall w(t) \in K'_+(E_1)$. □

3. Фундаментальная оператор-функция интегро-дифференциального оператора с производными высокого порядка от функционалов

Рассмотрим интегро-дифференциальный оператор с производными от функционалов высокого порядка вида

$$L^{(N)} = \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle \, a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t).$$

Здесь, как и ранее, A — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2; $a_l \in E_2$, $\alpha_l \in E_1$, $l = \overline{1,n}$; $K(t)$ — непрерывная функция, осуществляющая отображение $R_+ \to R$; $\delta(t)$ — функция Дирака; $\theta(t)$ — функция Хевисайда; кроме того, оператор A является обратимым.

Теорема 3.1. *Дифференциальный оператор* $S = \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle \, a_l \delta^N(t) - A\delta(t)$ *на классе* K'_+ *имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$W(t) = A^{-1} \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l - A^{-1}\delta(t),$$

где c_l $(l = \overline{1,n}\,)$ *— элементы вектор-функции* $\vec{c}(t)$, *которая является решением дифференциального уравнения* $B\vec{c}^{(N)}(t) - \vec{c}(t) = \vec{g}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно представлению решения дифференциального уравнения посредством фундаментальной оператор-функции соответствующего уравнению дифференциального оператора (см., например, [5]), вектор-функция $\vec{c}(t)$ имеет вид $\vec{c}(t) = V(t) * \vec{g}(t)$, где функция $V(t)$ является фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора $B\delta^N(t) - I\delta(t)$. Известно (см. [3]), что такой дифференциальный оператор имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$V(t) = \Gamma\, U(\Gamma t)(I - \tilde{Q})\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{p_i-k+1-j}\Big)\delta^{(kN)}(t).$$

Здесь $U(\Gamma t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\Gamma^{i-1}\dfrac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}$, а операторы $\tilde{Q}, \Gamma$, наборы $\Big\{\psi_i^{(j)},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p_i}\Big\}$ и $\Big\{\varphi_i^{(j)},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p_i}\Big\}$ введены в пункте 1.).

Найдем вектор-функцию $\vec{c}(t)$. Так как $\vec{c}(t) = V(t) * \vec{g}(t)$, получим

$$\vec{c}(t) = \Big(\Gamma U(\Gamma t)(I-\tilde{Q})\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\delta^{(kN)}(t)\Big) * \vec{d}\delta^{(N)}(t) =$$
$$= \Gamma U(\Gamma t)(I-\tilde{Q})\theta(t) * \vec{d}\delta^{(N)}(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\delta^{(kN)}(t) * \vec{d}\delta^{(N)}(t).$$

Используя свойства свертки обобщенных функций и дифференцирования обобщенных функций, получаем искомую вектор-функцию в виде

$$\vec{c}(t) = (\Gamma U(\Gamma t))^{(N)}(I-\tilde{Q})\theta(t)\vec{d} + (I-\tilde{Q})\theta(t)\vec{d} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\vec{d}\delta^{((k+1)N)}(t).$$

Далее, поскольку $(U(\Gamma t))^{(k)} = \Gamma U(\Gamma t)$ (см. замечание 1.3), получим

$$\vec{c}(t) = \Gamma^2 U(\Gamma t)(I-\tilde{Q})\theta(t)\vec{d} + (I-\tilde{Q})\theta(t)\vec{d} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big(\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\bullet, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\vec{d}\delta^{((k+1)N)}(t).$$

Аналогично вектор-функции $\vec{b}(t)$ (см. пункт 1.) введем в рассмотрение вектор-функцию $\vec{e}(t) = \Gamma^2 U(\Gamma t)(I-\tilde{Q})\theta(t)\vec{d}$, элементы которой будем обозначать как $e_l(t)$, $l=\overline{1,n}$. Тогда, используя определенные ранее (пункт 2.) векторы $\vec{h}$ и $\vec{f}$, получим

$$\vec{c}(t) = \vec{e}(t)\theta(t) + \vec{h}\theta(t) - \vec{f}\delta^{((k+1)N)}(t).$$

Чтобы убедиться в том, что оператор-функция $W(t)$ является фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора S, достаточно проверить выполнимость равенства $S * W(t) = W(t) * S = I\delta(t)$. Учитывая вид дифференциального оператора S и вид оператор-функции $W(t)$, получим

$$S * W(t) = \Big(\sum_{l=1}^{n}\langle\bullet, \alpha_l\rangle a_l\delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\Big) * W(t) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\langle\bullet, \alpha_l\rangle a_l\delta^{(N)}(t) * W(t) - A\delta(t) * W(t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) * \Big(\sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r - A^{-1}\delta(t) \Big) - A\delta(t) * \Big(\sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r - a^{-1}\delta(t) \Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left\langle A^{-1} c_r^{(N)} a_r, \alpha_l \right\rangle a_l - \sum_{l=1}^{n} \left\langle A^{-1} \bullet, \alpha_l \right\rangle \delta^{(N)}(t) a_l - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l + I\delta(t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left\langle B \begin{pmatrix} c_1^{(N)}(t) \\ \vdots \\ c_n^{(N)}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}, \alpha_l \right\rangle a_l - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l + I\delta(t) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) a_l + I\delta(t) = I\delta(t).$$

Итак, $S * W(t) = I\delta(t)$.

С другой стороны,

$$W(t) * S = W(t) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) \Big) =$$

$$= W(t) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) W(t) * - A\delta(t) \Big) =$$

$$= \Big(\sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r - A^{-1}\delta(t) \Big) * \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - \Big(\sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r - A^{-1}\delta(t) \Big) * A\delta(t) =$$

$$= A^{-1} \sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r * \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)} - A^{-1}\delta(t) * \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta(t) -$$

$$- A^{-1} \sum_{r=1}^{n} c_r(t) a_r * \delta(t) + A^{-1}\delta(t) * A\delta(t) =$$

$$= A^{-1}\delta(t) * \Big(\sum_{r=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_r^{(N)}(t) a_r * \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l A^{-1}\delta(t) - \sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l A^{-1} \delta^{(N)}(t) -$$

$$- \sum_{r=1} n c_r(t) a_r \Big) * A\delta(t) + I\delta(t) =$$

$$= A^{-1}\delta(t) * \left(\sum_{l=1}^{n} \left(B \begin{pmatrix} c_1^{(N)}(t) \\ \vdots \\ c_n^{(N)}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \right) - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) \right) a_l * A\delta(t) + I\delta(t) =$$

$$= A^{-1} \Big(\sum_{l=1}^{n} c_l(t) - \sum_{l=1}^{n} c_l(t) \Big) a_l A\delta(t) + I\delta(t) = I\delta(t).$$

Таким образом, оператор-функция $W(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции для дифференциального оператора S и, следовательно, является фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора N-го порядка $S = \sum\limits_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t)$ в случае обратимости оператора A. □

Аналогично оператор-функциям $H(t)$ и $\tilde{H}(t)$ (см. пункт 2.) определим оператор-функции

$$H_1(t) = A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)*e_l(t))\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_lK(t)\theta(t)a_l - A^{-1}k(t)\theta(t)- \\ - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_lK^{((k+1)N)}(t)\theta(t)a_l, \tag{3.1}$$

$$\tilde{H}_1(t) = A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(e_l(t)*K(t))\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_lK(t)\theta(t)a_l - A^{-1}k(t)\theta(t)- \\ - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_lK^{((k+1)N)}(t)\theta(t)a_l, \tag{3.2}$$

где функции $e_l(t)$, $l=\overline{1,n}$, являются элементами введенной при доказательстве теоремы 3.1 вектор-функции $\vec{e}(t.)$

Лемма 3.1. *Пусть функция $K(t)$ удовлетворяет условию*

$$K^{(m)}(0)=0, \quad m=0,1,\ldots,pN-1, \quad p=\underset{i=\overline{1,n}}{max}(p_i), \quad N\geq 2. \tag{3.3}$$

Тогда оператор-функция $H_1(t)$ вида (3.1) представима в виде

$$H_1(t)=K(t)\theta(t)*W(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $K(t)$ удовлетворяет условиям (3.3), то для оператор-функции $H_1(t)$ вида (3.1) выполнено:

$$A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)*e_l(t))\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_lK(t)\theta(t)a_l - A^{-1}K(t)\theta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_lK^{(k+1)}\theta(t)a_l = \\ = A^{-1}\sum_{l=1}^{n}(K(t)\theta(t))*(e_l(t)\theta(t))a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_l(K(t)\theta(t))*\delta(t)a_l- \\ -A^{-1}(K(t)\theta(t))*\delta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_l\Big(K^{(k+1)}\theta(t) + \sum_{m=0}^{(k+1)N-1}K^{(m)}(0)\delta^{((k+1)N-1-m)}(t)\Big)a_l.$$

А, согласно свойству дифференцирования произведения непрерывной функции и функции Хевисайда (см. замечание 1.1, 1.2), получившееся представление оператор-функции $H_1(t)$ можно записать в виде

$$K(t)\theta(t)*\Big(A^{-1}\sum_{l=1}^{n}e_l(t)\theta(t)a_l + A^{-1}\sum_{l=1}^{n}h_l\delta(t)a_l - A^{-1}\delta(t) - A^{-1}\sum_{l=1}^{n}f_l\delta^{(k+1)N}(t))a_l\Big) = \\ = K(t)\theta(t)*W(t).$$

Таким образом, действительно, справедливо равенство $H(t)=K(t)\theta(t)*W(t)$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть функция* $K(t)$ *удовлетворяет условию* (3.3). *Тогда оператор-функция* $\tilde{H}_1(t)$ *вида* (3.2) *представима в виде*

$$\tilde{H}_1(t) = W(t) * K(t)\theta(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.1. □

Теорема 3.2. *Пусть функция* $K(t)$ *удовлетворяет условию* (3.3). *Тогда интегро-дифференциальный оператор с производными от функционалов высокого порядка* $L^{(N)} = \sum\limits_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle \, a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)$ *на классе* K'_+ *имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$E_1(t) = V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) = \big(\tilde{R}_1(t) + I\delta(t)\big) * V(t),$$

где функция $V(t)$ *является фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора высокого порядка вида* $B\delta^{(N)}(t) - I\delta(t)$, $R_1(t)$ *является резольвентой ядра* $H_1(t)$ *вида* (3.1), $\tilde{R}_1(t)$ *является резольвентой ядра* $\tilde{H}_1(t)$ *вида* (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя введенные обозначения и вид интегро-дифференциального оператора $L^{(N)}$ для свертки $L^{(N)} * E(t)$ при $E_1(t) = V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big)$, согласно лемме 3.1, получим:

$$L^{(N)} * E_1(t) = L^{(N)} * \big(V(t) * (R_1(t) + I\delta(t))\big) =$$

$$= \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\Big) * V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) - K(t)\theta(t) * V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) =$$

$$= I\delta(t) * (R_1(t) + I\delta(t)) - R_1(t) = I\delta(t).$$

А согласно лемме 3.2 для свертки $E_1(t) * L^{(N)}$ получим:

$$E_1(t) * L^{(N)} = V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) * L^{(N)} =$$

$$= V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - K(t)\theta(t)\Big) =$$

$$= V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\Big) - V(t) * \big(R_1(t) + I\delta(t)\big) * K(t)\theta(t) =$$

$$= (\tilde{R}_1(t) + I\delta(t)) * V(t) * \Big(\sum_{l=1}^{n} \langle \bullet, \alpha_l \rangle a_l \delta^{(N)}(t) - A\delta(t)\Big) - \tilde{R}_1(t) =$$

$$= \big(\tilde{R}_1(t) + I\delta(t)\big) * I\delta(t) - \tilde{R}_1(t) = I\delta(t).$$

Таким образом, доказано, что оператор-функция $E_1(t)$ удовлетворяет определению фундаментальной оператор-функции, а именно $L^{(N)} * E_1(t) * u(t) = u(t)$, $\forall u(t) \in K'_+(E_2)$, $E_1(t) * L^{(N)} * w(t) = w(t)$, $\forall w(t) \in K'_+(E_1)$. □

З а м е ч а н и е 3.1. Аналогично [1], условия (3.3) в теореме 3.2 можно заменить на одно из следующих условий:

1. $\varphi_i^{(j)} \in N(K^{(m)}(0)),\ \ m = 0, 1, \ldots, pN-1,\ \ p = \underset{i=\overline{1,n}}{max}(p_i),\ \ N \geq 1;$

2. $\psi_i^{(j)} \in R^{\perp}(K^{(m)}(0)),\ \ m = 0, 1, \ldots, pN-1,\ \ p = \underset{i=\overline{1,n}}{max}(p_i),\ \ N \geq 1;$

3. $\psi_i^{(j)} \in N(K^{*(m)}0)),\ \ m = 0, 1, \ldots, pN-1,\ \ p = \underset{i=\overline{1,n}}{max}(p_i),\ \ N \geq 1.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, условия (3.3) влияют только на сингулярную составляющую сверток

$$K(t)\theta(t) * W(t), \quad W(t) * K(t)\theta(t), \quad K(t)\theta(t) * M(t), \quad M(t) * K(t)\theta(t),$$

которая имеет вид

$$\sum_{l=1}^{n} f_l \Big(\sum_{m=0}^{(k+1)N-1} K^{(m)}(0)\delta^{((k+1)N-1-m)}(t) \Big) a_l,$$

или учитывая структуру элементов $f_l,\ \ l = \overline{1,n}$ (см. пункт 2.), вид

$$\sum_{l=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{k=0}^{p_i-1} \sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \bullet, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \Big] \langle A^{-1}\bullet, \alpha_l \rangle \Big) \sum_{m=0}^{(k+1)N-1} K^{(m)}(0)\delta^{((k+1)N-1-m)}(t) a_l.$$

Остается заметить, что условия (3.3) обеспечивают равенство нулю этого сингулярного выражения, для чего достаточно выполнения любого из приведенных условий. □

References

[1] М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева, “Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нётеровым оператором в главной части в банаховых пространствах”, *Сибирский математический журнал*, **46**:6 (2005), 1393–1406; англ. пер.:M. V. Falaleev, E. Yu. Grazhdantseva, “Fundamental operator-functions of degenerate differential and differential-difference operators with Noetherian operator in the main part in Banach spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **30**:1 (2019), 73–94.

[2] М. В. Фалалеев, “Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах”, *Сибирский математический журнал*, **41**:5 (2000), 1167–1182; англ. пер.:M. V. Falaleev, “Fundamental operator-functions of singular differential operators in Banach spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **41**:5 (2000), 1167–1182.

[3] Е. Ю. Гражданцева, *Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах*, Изд-во ИГУ, Иркутск, 2013. [E. Yu. Grazhdantseva, *Fundamental‘nie operator-funkcii virogdennih differencial‘nih operatorov visokogo poriadka v banahovih prostranstvah*, Izdatelstvo ISU, Irkutsk, 2013 (In Russian)].

[4] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969; англ. пер.:M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations Hardcover*. V. I, Wolters-Noordhoff B.V., Great Britain, 1974.

[5] M. V. Falaleev, "Generalized Solution of Integro-Differential Equations of the Viscoelasticity Theory", *International Conference on Applied Science and Engineering-Proceeding*, 2018, 42–45.

Информация об авторе

Гражданцева Елена Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений. Иркутский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: grelyur@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9541-5679

Поступила в редакцию 31.07.2020
Поступила после рецензирования 02.09.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Elena Yu. Grazhdantseva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis and Differential Equations Department. Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: grelyur@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-9541-5679

Received 31.07.2020
Reviewed 02.09.2020
Accepted for press 09.09.2020

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-263-273
УДК 517.977.5

К вопросу о регуляризации классических условий оптимальности в выпуклой задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями

Фёдор Алексеевич КУТЕРИН
ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46, БОКС-120

On the regularization of classical optimality conditions in a convex optimal control problem with state constraints

Fedor A. KUTERIN
Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences
46 Ul'yanov St., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности в выпуклой задаче оптимального управлении для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве суммируемых с квадратом функций. Множество допустимых управлений задачи по традиции вкладывается также в пространство суммируемых с квадратом функций. Однако целевой функционал оптимизационной задачи не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Получение регуляризованных классических условий оптимальности основано на приеме, связанном с использованием двух параметров регуляризации. Один из них «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи. Основное предназначение получаемых регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги для целей практического решения рассматриваемой задачи оптимального управлений с поточечными фазовыми ограничениями.

Ключевые слова: оптимальное управление; фазовые ограничения; некорректные задачи; двойственная регуляризация

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 20-01-00199_а, № 19-07-00782_а) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (договор № 075-02-2020-1632 от 12 мая 2020 г.).

Для цитирования: *Кутерин Ф.А.* К вопросу о регуляризации классических условий оптимальности в выпуклой задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 263–273. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-263-273.

Abstract. We consider the regularization of classical optimality conditions in a convex optimal control problem for a linear system of ordinary differential equations with pointwise state constraints such as equality and inequality, understood as constraints in the Hilbert space of square-integrable functions. The set of admissible task controls is traditionally embedded in the space of square-integrable functions. However, the target functional of the optimization problem is not, generally speaking, strongly convex. Obtaining regularized classical optimality conditions is based on a technique involving the use of two regularization parameters. One of them is used for the regularization of the dual problem, while the other is contained in a strongly convex regularizing addition to the target functional of the original problem. The main purpose of the obtained regularized Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle is the stable generation of minimizing approximate solutions in the sense of J. Varga for the purpose of practical solving the considered optimal control problem with pointwise state constraints.

Keywords: optimal control; state constraints; ill-posed problem; dual regularization

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 20-01-00199_a, no. 19-07-00782_a) and Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (contract no. 075-02-2020-1632 from 12 May 2020).

For citation: Kuterin F.A. K voprosu o regulyarizatsii klassicheskikh usloviy optimal'nosti v vypukloy zadache optimal'nogo upravleniya s fazovymi ogranicheniyami [On the regularization of classical optimality conditions in a convex optimal control problem with state constraints]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 263–273.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-263-273. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Работа посвящена регуляризации принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) в выпуклой задаче оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства. Множество допустимых управлений задачи по традиции вкладывается в пространство суммируемых с квадратом функций, однако, ее целевой функционал не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Основное предназначение доказываемых в работе регуляризованных классических условий оптимальности (КУО) — устойчивое по отношению к погрешностям исходных данных задачи конструирование минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги [1, гл. III].

Задачи, совпадающие по форме своих постановок с изучаемой в данной работе, а также и более общие подобные нелинейные задачи рассматривались с точки зрения получения КУО во многих публикациях на протяжении более чем пяти десятков лет. В частности, весьма полную библиографию, посвященную публикациям по теории ПМП в задачах оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечными фазовыми ограничениями, можно найти в [2, 3]. Отличительной особенностью данной работы, по сравнению с указанными публикациями, является учет возможного неточного задания исходных данных оптимизационной задачи и, как следствие, учет ее возможной неустойчивости, а также и соответствующей возможной неустойчивости КУО. Примеры неустойчивости КУО в задачах оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями-равенствами могут быть найдены в [4–6].

Первые результаты по регуляризация КУО в задачах условной выпуклой оптимизации в гильбертовых пространствах были получены в работах [4,7,8]. В их основе лежат методы двойственной регуляризации [9]. Задачи оптимального управления линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечными фазовыми ограничениями, близкие, так или иначе, по постановкам задаче данной работы, рассматривались в [7, 10, 11]. Их отличительной особенностью является то, что фазовые ограничения во всех этих работах понимаются как ограничения в пространстве суммируемых с квадратом функций. При этом в [7] задача с фазовыми ограничениями рассматривалась при точном задании исходных данных, а в [11, 12] в ограничениях задачи отсутствовали фазовые ограничения-неравенства.

Настоящая работа непосредственно опирается на результаты работ [9,10]. Постановка задачи в ней совпадает с постановкой задачи в [10], однако результаты этой работы и [10] существенно разнятся благодаря разнице методов их получения. Как в [10], так и в данной работе выпуклый целевой функционал задачи не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Указанная разница в методах получения результатов в [10] и в данной работе состоит в следующем. В [10] МПР конструируется из точек минимума функции Лагранжа задачи, соответствующих значениям двойственных переменных из некоторой последовательности, определяемой регуляризованными КУО. В отсутствие сильной выпуклости целевого функционала, при ограниченном множестве допустимых элементов, гарантируется лишь существование элемента МПР в соответствующем множестве минималей выпуклой по прямой переменной функции Лагранжа. Как следствие, генерирование МПР в силу регуляризованных КУО в такой ситуации в существенной степени теряет свою конструктивность. Для преодоления этого недостатка [10] в данной работе, как и в аналогичном случае в [9], вместо одного используются два параметра регуляризации. Один из них, как и в [7,10,11], «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи. Таким образом, исходная задача с фазовыми ограничениями аппроксимируется семейством задач, в каждой из которых целевой функционал задачи является сильно выпуклым, и, соответственно, сильно выпуклой по прямой переменной является и ее функция Лагранжа.

Применяемый в данной работе прием, связанный с использованием двух параметров регуляризации, может быть эффективен и при получении регуляризованных КУО в итерационной форме [11–13] в рассматриваемой задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями, однако вопросы итеративной двойственной регуляризации в данной работе не рассматриваются. Численные эксперименты по применению регуляризованных КУО в задачах бесконечномерной условной оптимизации, в том числе и в задачах оптимального управления, рассматривались ранее в [12–15].

1. Постановка задачи

Рассматривается выпуклая задача оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$

$$f^\delta(u) \equiv \int_0^T \left(\left\langle F^\delta(t)x^\delta[u](t), x^\delta[u](t)\right\rangle + \left\langle G^\delta(t)u(t), u(t)\right\rangle\right) dt \to \min, \quad u \in \mathcal{D}, \qquad (P^\delta)$$

$$g_1^\delta(u)(t) \equiv \langle \varphi_1^\delta(t), x^\delta[u](t) \rangle = h^\delta(t),\ g_2^\delta(u)(t) \equiv \varphi_2^\delta\big(t, x^\delta[u](t)\big) \leqslant 0 \quad \text{при п. в. } t \in X.$$

Здесь: $f^\delta : L_2(0,T) \to \mathbb{R}^1$ — непрерывный выпуклый функционал с измеримыми по Лебегу неотрицательными ограниченными матрицами $F^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $G^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathcal{D} \subset L_2(0,T)$ — допустимое множество, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0,T) :\ u(t) \in U$ при п. в. $t \in (0,T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт, $X \subset [0,T]$, $X = \operatorname{cl} \overset{\circ}{X}$, $x^\delta[u](t)$, $t \in [0,T]$ — решение задачи Коши

$$\dot{x} = A^\delta(t)x + B^\delta(t)u(t), \quad x(0) = x_0^\delta \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

с измеримыми по Лебегу ограниченными матрицами $A^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$, φ_1^δ, $h^\delta \in L_2(X)$ — заданные функции, $\varphi_2^\delta : X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная выпуклая по x при всех $t \in X$ функция, удовлетворяющая условию $|\varphi_2^\delta(t,x) - \varphi_2^\delta(t,y)| \leqslant L_M|x-y|\ \forall x, y \in S_M^n \equiv \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leqslant M\}$, где постоянная L_M не зависит от $t \in X$.

Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P^δ) означает, что эти данные соответствуют либо ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), т. е. задаются с ошибкой, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных задачи

$$\|F^\delta - F^0\|_{2,(0,T)} \leqslant C\delta,\ \|G^\delta - G^0\|_{2,(0,T)} \leqslant C\delta,\ \ \|\varphi_1^\delta - \varphi_1^0\|_{2,X} \leqslant C\delta,\ \ \|h^\delta - h^0\|_{2,X} \leqslant C\delta, \tag{1.2}$$

$$|\varphi_2^\delta(t,x) - \varphi_2^0(t,x)| \leqslant C_M\delta\ \forall\,(t,x) \in X \times S_M^n,$$

$$\|A^\delta - A^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant C\delta,\ \ \|B^\delta - B^0\|_{\infty,(0,T)} \leqslant C\delta,\ \ |x_0^\delta - x_0^0| \leqslant C\delta,$$

где C, $C_M > 0$ не зависят от δ.

Тогда на основании оценок (1.2) отклонения возмущенных исходных данных от точных, глобальной разрешимости задачи Коши (1.1) и равномерной по $\delta \in [0,\delta_0]$, $u \in \mathcal{D}$ ограниченности ее решений можно утверждать, что

$$|f^\delta(u) - f^0(u)| \leqslant C_1\delta \quad \forall u \in \mathcal{D}, \tag{1.3}$$

$$\|g_1^\delta(u) - g_1^0(u)\|_{2,X} \leqslant C_2\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}) \quad \forall u \in L_2(0,T), \quad \|h^\delta - h^0\|_{2,X} \leqslant C\delta,$$

$$\|g_2^\delta(u) - g_2^0(u)\|_{2,X} \leqslant C_3\delta \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

где постоянные C_1, C_2, $C_3 > 0$ не зависят от $\delta \in (0,\delta_0]$, $u \in L_2(0,T)$.

З а м е ч а н и е 1.1. При определенных условиях на исходные данные задачи (P^δ) ее ограничения можно, естественно, трактовать и как ограничения в $L_\infty(X)$ (φ_1, $h \in L_\infty(X)$) и $C(X)$ (φ_1, $h \in C(X)$). При этом понятия оптимальности управления в указанных частных случаях эквивалентны понятию оптимальности для случая «тех же» ограничений в $L_2(X)$.

Целью настоящей работы является конструирование минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) в смысле Дж. Варги при условии, что мы располагаем лишь приближенно известными с ошибкой δ исходными данными. Напомним, что под МПР понимается такая последовательность $u^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, для которой справедливы соотношения $f^0(u^i) \leqslant \beta + \delta^i$, $u^i \in \mathcal{D}^{0\epsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \ldots$. Здесь β — обобщенная нижняя грань, определяемая соотношениями

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon, \quad \beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0\epsilon}} f^0(u), \quad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{0\epsilon} = \varnothing,$$

$$\mathcal{D}^{\delta\epsilon} \equiv \{u \in \mathcal{D} : \|g_1^\delta(u) - h^\delta\|_{2,X} \leqslant \epsilon, \min_{z \in \mathcal{H}_-} \|g_2^\delta(u) - z\|_{2,X} \leqslant \epsilon\}, \ \epsilon \geqslant 0,$$

$$\mathcal{H}_- \equiv \{z \in L_2(X) : z(t) \leqslant 0 \text{ при п.в. } t \in X\}, \quad \mathcal{D}^{00} \equiv \mathcal{D}^0.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta \leqslant \beta_0$, где β_0 — классическое значение задачи. Но в случае поставленной выше задачи (P^0) имеет место равенство $\beta = \beta_0$.

Пусть решение задачи (P^0) (единственное, в случае строгой (сильной) выпуклости f^0) существует. Будем обозначать множество всех таких решений $U^0 \equiv \{u^* \in \mathcal{D}^0 : f^0(u^*) = \min_{u \in \mathcal{D}^0} f^0(u)\}$, а решение с минимальной нормой — через u^0. Очевидно, задача (P^0) заведомо разрешима, если $\mathcal{D}^0 \neq \varnothing$.

Введем регулярный функционал Лагранжа $L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(u) + \langle \lambda, g_1^\delta(u) - h^\delta \rangle + \langle \mu, g_2^\delta(u) \rangle$, вогнутый двойственный функционал $V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ и соответствующую двойственную задачу $V^\delta(\lambda, \mu) \to \sup$, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

В силу ограниченности множества $\mathcal{D}$ двойственный функционал V^δ, очевидно, определен и конечен для любого элемента $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. При этом, также очевидно, значение $V^\delta(\lambda, \mu)$ достигается на элементах $u^\delta[\lambda, \mu]$ из множества $U^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{Argmin}\{L^\delta(u, \lambda, \mu), u \in \mathcal{D}\}$ при $(\lambda, \mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, где $\mathcal{H}_+ \equiv \{z \in L_2(X) : z(t) \geqslant 0$ при п. в. $t \in X\}$.

2. Аппроксимация выпуклой задачи задачами с сильно выпуклыми функционалами цели

С целью построения МПР в исходной выпуклой задаче (P^0), действуя, как в работе [9] в случае линейно-выпуклой задачи с конечным числом функциональных ограничений типа неравенства, введем семейство регуляризованных задач

$$f_\gamma^\delta(u) \equiv f^\delta(u) + \gamma\|u\|^2 \to \min, \quad u \in \mathcal{D}, \tag{P_γ^δ}$$

$$g_1^\delta(u)(t) \equiv \langle \varphi_1^\delta(t), x^\delta[u](t) \rangle = h^\delta(t), \ g_2^\delta(u)(t) \equiv \varphi_2^\delta\big(t, x^\delta[u](t)\big) \leqslant 0 \quad \text{при п.в. } t \in X.$$

При каждом $\gamma > 0$ задача (P_γ^δ) является задачей с сильно выпуклым функционалом f_γ^δ с постоянной сильной выпуклости $\gamma/2$, так как сумма выпуклого и сильно выпуклого функционала является сильно выпуклым функционалом. Отметим также, что функционал f_γ^δ является субдифференцируемым, так как он выпуклый и дифференцируемый (как квадратичный).

Обозначим через u_γ^0 ($u^0 \equiv u_0^0$ — нормальное решение исходной выпуклой задачи (P^0) = (P_0^0)) единственное решение задачи (P_γ^0). Тогда по теореме о сходимости метода стабилизации Тихонова (см. [16, Глава 9, §4, Теорема 1]) имеет место сходимость

$$\|u_\gamma^0 - u^0\| \to 0, \quad \gamma \to 0. \tag{2.1}$$

Определим регулярный функционала Лагранжа задачи (P^δ_γ) $L^\delta_\gamma(u,\lambda,\mu) \equiv f^\delta(u) + \gamma\|u\|^2 + \langle \lambda, g_1^\delta(u) - h^\delta \rangle + \langle \mu, g_2^\delta(u) \rangle$, и соответствующую двойственную задачу

$$V^\delta_\gamma(\lambda,\mu) \to \sup,\ (\lambda,\mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+, \quad V^\delta_\gamma(\lambda,\mu) \equiv \inf_{u\in\mathcal{D}} L^\delta_\gamma(u,\lambda,\mu),\ (\lambda,\mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}.$$

Вследствие сильной выпуклости по u, минимум функционала Лагранжа $L^\delta_\gamma(\cdot,\lambda,\mu)$ достигается в единственной точке $u^\delta_\gamma[\lambda,\mu] = \operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{D}} L^\delta_\gamma(u,\lambda,\mu)$ при $(\lambda,\mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

Ниже нам понадобится оценка отклонения значения двойственного функционала возмущенной регуляризованной задачи от двойственного функционала невозмущенной задачи.

Лемма 2.1. *В случае ограниченного множества $\mathcal{D}$ справедлива оценка*

$$|V^\delta_\gamma(\lambda,\mu) - V^0(\lambda,\mu)| \leqslant K(\delta(1 + \|(\lambda,\mu)\|) + \gamma), \tag{2.2}$$

в которой постоянная $K > 0$ зависит от $\max_{u\in\mathcal{D}} \|u\|$, а также констант C, C_1, C_2, C_3 соотношений (1.3) и не зависит от δ, γ, $(\lambda,\mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим без ограничения общности рассуждений, что $V^\delta_\gamma(\lambda,\mu) \geqslant V^0(\lambda,\mu)$. В этом случае, используя оценки (1.3), можем записать:

$$V^\delta_\gamma(\lambda,\mu) - V^0(\lambda,\mu) = V^\delta_\gamma(\lambda,\mu) - \inf_{u\in\mathcal{D}}(L^0(u,\lambda,\mu) - L^\delta_\gamma(u,\lambda,\mu) + L^\delta_\gamma(u,\lambda,\mu)) \leqslant$$

$$\leqslant -\inf_{u\in\mathcal{D}}(L^0(u,\lambda,\mu) - L^\delta_\gamma(u,\lambda,\mu)) \leqslant \sup_{u\in\mathcal{D}} |L^\delta_\gamma(u,\lambda,\mu) - L^0(u,\lambda,\mu)| \leqslant K(\delta(1 + \|(\lambda,\mu)\|) + \gamma)$$

Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha}_\gamma, \mu^{\delta,\alpha}_\gamma)$ единственное в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$ решение задачи максимизации

$$R^{\delta,\alpha}_\gamma(\lambda,\mu) \equiv V^\delta_\gamma(\lambda,\mu) - \alpha\|(\lambda,\mu)\|^2 \to \max, \quad (\lambda,\mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+.$$

Пусть выполняется условие согласования $\delta/\alpha(\delta) \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$.

Применим здесь теорему 1 из [10], представляющую собой теорему сходимости метода двойственной регуляризации для задачи (P^0) с выпуклым целевым функционалом. Так как целевой функционал задачи (P^δ_γ) является сильно выпуклым при $\gamma > 0$, то множество решений каждой такой задачи при $\gamma > 0$ состоит из единственного элемента $\tilde{u}_{\delta\gamma} \equiv u^\delta_\gamma[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_\gamma, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_\gamma]$. Поэтому теорема 1 из [10] приобретает при каждом $\gamma > 0$ следующий вид.

Теорема 2.1. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0_γ) задача, при каждом $\gamma > 0$ имеют место соотношения*

$$\alpha(\delta)\|(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_\gamma, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_\gamma)\| \to 0, \quad f^0(\tilde{u}_{\delta\gamma}) \to \min_{u\in\mathcal{D}^0} f^0_\gamma(u) = f^0_\gamma(u^0_\gamma), \quad \delta \to 0,$$

$$g_1^0(\tilde{u}_{\delta\gamma}) - h^0 \to 0, \quad g_2^0(\tilde{u}_{\delta\gamma}) \leqslant \phi(\delta,\gamma),\ \phi(\delta,\gamma) \geqslant 0, \quad \|\phi(\delta,\gamma)\| \to 0, \quad \delta \to 0,$$
$$\big\langle (\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_\gamma, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_\gamma), (g_1^\delta(\tilde{u}_{\delta\gamma}) - h^\delta, g_2^\delta(\tilde{u}_{\delta\gamma})) \big\rangle \to 0,\ \delta \to 0.$$

При этом, так как функционал f^0_γ является субдифференцируемым в смысле выпуклого анализа, справедливо и предельное соотношение $\tilde{u}_{\delta\gamma} \to u^0_\gamma$, $\delta \to 0$.

Следствием этой теоремы и предельного соотношения (2.1) является

Теорема 2.2. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (P^0) *задача, существует такая зависимость* $\delta(\gamma)$, $\delta(\gamma) \to 0$, $\gamma \to 0$, *что имеют место соотношения*

$$\alpha(\delta(\gamma))\|(\hat{\lambda}_\gamma, \hat{\mu}_\gamma)\| \to 0, \quad f^0(\hat{u}_\gamma) \to \min_{u \in \mathcal{D}^0} f^0(u) = f^0(u^0), \quad \gamma \to 0,$$

$$g_1^0(\hat{u}_\gamma) - h^0 \to 0, \quad g_2^0(\hat{u}_\gamma) \leqslant \phi(\delta(\gamma), \gamma), \quad \phi(\delta(\gamma), \gamma) \geqslant 0, \quad \|\phi(\delta(\gamma), \gamma)\| \to 0, \quad \gamma \to 0,$$
$$\big\langle (\hat{\lambda}_\gamma, \hat{\mu}_\gamma), (g_1^{\delta(\gamma)}(\hat{u}_\gamma) - h^{\delta(\gamma)}, g_2^{\delta(\gamma)}(\hat{u}_\gamma)) \big\rangle \to 0,\ \gamma \to 0,$$

где $(\hat{\lambda}_\gamma, \hat{\mu}_\gamma) \equiv (\lambda_\gamma^{\delta(\gamma),\alpha(\delta(\gamma))}, \mu_\gamma^{\delta(\gamma),\alpha(\delta(\gamma))})$, $\hat{u}_\gamma \equiv u_\gamma^{\delta(\gamma)}[\lambda_\gamma^{\delta(\gamma),\alpha(\delta(\gamma))}, \mu_\gamma^{\delta(\gamma),\alpha(\delta(\gamma))}]$. *Одновременно справедливо и предельное соотношение* $\hat{u}_\gamma \to u^0, \quad \gamma \to 0$.

3. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина

В настоящем разделе сформулируем и докажем необходимые и достаточные условия существования МПР в задаче (P^0). Эти условия можно трактовать, соответственно, как регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями, целевой функционал которой является выпуклым, но, вообще говоря, не сильно выпуклым.

Регуляризованный принцип Лагранжа. Справедлива следующая теорема — регуляризованный принцип Лагранжа в задаче (P^0).

Теорема 3.1. *Пусть* $\gamma^k > 0$, $\gamma^k \to 0$, $k \to \infty$ *— произвольная фиксированная последовательность. Для существования МПР в задаче* (P^0) *, в независимости от фактов существования или несуществования решения двойственной к* (P^0) *задачи, необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность* $\delta^k > 0$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$ *и последовательность двойственных переменных* $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $\delta^k\|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполнялись предельные соотношения*

$$u_{\gamma^k}^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k \epsilon^k},\ \epsilon^k \to 0,\ k \to \infty, \tag{3.1}$$

$$\big\langle (\lambda^k, \mu^k), (g_1^{\delta^k}(u_{\gamma^k}^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]) - h^{\delta^k}, g_2^{\delta^k}(u_{\gamma^k}^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k])) \big\rangle \to 0,\ k \to \infty. \tag{3.2}$$

При этом последовательность $u_{\gamma^k}^{\delta^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым МПР и каждая его слабая предельная точка есть решение задачи* (P^0). *В качестве последовательностей* δ^k, (λ^k, μ^k), $k = 1, 2, \ldots$, *могут быть взяты последовательности* $\delta(\gamma^k)$, $(\lambda_{\gamma^k}^{\delta(\gamma^k),\alpha(\delta(\gamma^k))}, \mu_{\gamma^k}^{\delta(\gamma^k),\alpha(\delta(\gamma^k))})$, $k = 1, 2, \ldots$, *генерируемые методом двойственной регуляризации теоремы* 2.2 *при* $\gamma = \gamma^k$. *Для них справедливо предельное соотношение*

$$u_{\gamma^k}^{\delta^k}[\lambda_{\gamma^k}^{\delta(\gamma^k),\alpha(\delta(\gamma^k))}, \mu_{\gamma^k}^{\delta(\gamma^k),\alpha(\delta(\gamma^k))}] \to u^0,\ k \to \infty. \tag{3.3}$$

Одновременно с предельными соотношениями (3.1), (3.2) *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \to \sup_{(\lambda,\mu) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+} V^0(\lambda, \mu), \quad k \to \infty. \tag{3.4}$$

З а м е ч а н и е 3.1. В силу ограниченности множества $\mathcal{D}$ условие (3.1) можно заменить условием $u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{0\tilde{\epsilon}^k}$, где $\tilde{\epsilon}^k\to 0,\ k\to\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства необходимости условий теоремы, прежде всего, заметим, что задача (P^0) разрешима, т. е. $U^0\neq\varnothing$, благодаря условиям на исходные данные и существованию МПР. Теперь включение (3.1) и предельное соотношение (3.2), а также предельное соотношение $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0,\ k\to\infty$, теоремы вытекают из соотношений теоремы 2.2 с учетом ограниченности $\mathcal{D}$, если в качестве последовательности $\delta^k,\ k=1,2,\dots$, и точек (λ^k,μ^k), $u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k]$ взять последовательность $\delta(\gamma^k),\ k=1,2,\dots$, и точки $(\lambda^{\delta(\gamma^k),\alpha(\delta(\gamma^k))}_{\gamma^k},\mu^{\delta(\gamma^k),\alpha(\delta(\gamma^k))}_{\gamma^k})\equiv(\tilde{\lambda}_k,\tilde{\mu}_k)$, $u^{\delta(\gamma^k)}_{\gamma^k}[\tilde{\lambda}_k,\tilde{\mu}_k]\equiv\tilde{u}_k,\ k=1,2,\dots$, соответственно, с $\gamma^k\to 0,\ k\to\infty$. Покажем, что, одновременно с соотношениями (3.1), (3.2), выполняется и сходимость (3.4). Можем записать

$$V^{\delta(\gamma^k)}_{\gamma^k}(\tilde{\lambda}_k,\tilde{\mu}_k)=f^{\delta(\gamma^k)}(\tilde{u}_k)+\gamma^k\|\tilde{u}_k\|^2+\big\langle(\tilde{\lambda}_k,\tilde{\mu}_k),(g_1^{\delta(\gamma^k)}(\tilde{u}_k)-h^{\delta(\gamma^k)},g_2^{\delta(\gamma^k)}(\tilde{u}_k))\big\rangle.$$

Тогда в силу (3.2) получаем, что $V^{\delta(\gamma^k)}_{\gamma^k}(\tilde{\lambda}_k,\tilde{\mu}_k)-f^{\delta(\gamma^k)}(\tilde{u}_k)\to 0,\ k\to\infty$, откуда в силу ограниченности допустимого множества $\mathcal{D}$ и предельного соотношения (см. теорему 2.2) $f^0(\tilde{u}_k)\to f^0(u^0),\ k\to\infty$, следует, что $f^{\delta(\gamma^k)}(\tilde{u}_k)\to f^0(u^0),\ k\to\infty$. Таким образом, справедливо предельное соотношение $V^{\delta(\gamma^k)}_{\gamma^k}(\tilde{\lambda}_k,\tilde{\mu}_k)\to f^0(u^0),\ k\to\infty$. Но тогда, пользуясь оценкой (2.2) и условием согласования $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|=\delta(\gamma^k)\|(\tilde{\lambda}_k,\tilde{\mu}_k)\|\to 0$, $k\to\infty$, получаем окончательно равенство (3.4).

Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что множество U^0 не пусто ввиду включения $u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}$, ограниченности $\mathcal{D}$ и условий на исходные данные задачи (P^0). Далее, так как $u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k]$ минимизирует функционал $L^{\delta^k}_{\gamma^k}(\cdot,\lambda^k,\mu^k)$, можем записать

$$f^{\delta^k}(u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k])+\gamma^k\|u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k]\|^2+\big\langle(\lambda^k,\mu^k),(g_1^{\delta^k}(u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k]),g_2^{\delta^k}(u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k]))\big\rangle$$

$$\leqslant f^{\delta^k}(u)+\gamma^k\|u\|^2+\big\langle(\lambda^k,\mu^k),(g_1^{\delta^k}(u),g_2^{\delta^k}(u))\big\rangle\ \forall\,u\in\mathcal{D}.$$

В силу условий теоремы отсюда следует, с учетом ограниченности $\mathcal{D}$, что

$$f^{\delta^k}(u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k])\leqslant f^{\delta^k}(u)+\big\langle(\lambda^k,\mu^k),(g_1^{\delta^k}(u),g_2^{\delta^k}(u))\big\rangle+\psi^k\ \forall\,u\in\mathcal{D},\ \ \psi^k\to 0,\ k\to\infty.$$

Положим здесь $u=u^0\in U^0$ и используем условие согласования $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$. Тогда получаем $f^0(u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k])\leqslant f^0(u^0)+\widetilde{\psi}^k$, $\widetilde{\psi}^k\to 0,\ k\to\infty$. Так как одновременно мы имеем включение $u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k\epsilon^k}$, то, используя классические свойства слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве, получаем, что $f^0(u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k])\to f^0(u^0),\ k\to\infty$, то есть последовательность $u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k,\mu^k],\ k=1,2,\dots$, является МПР в задаче (P^0). Последнее предельное соотношение в совокупности с (3.2) приводят, в свою очередь, к предельному соотношению $V^{\delta^k}_{\gamma^k}(\lambda^k,\mu^k)\to f^0(u^0),\ k\to\infty$. Далее, так как благодаря оценке (2.2) и предельному соотношению $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\| \to 0,\ k\to\infty,$ можно утверждать, что справедливо предельное соотношение $V^{\delta^k}_{\gamma^k}(\lambda^k,\mu^k) - V^0(\lambda^k,\mu^k) \to 0,\ k\to\infty,$ то получаем, окончательно, предельное соотношение (3.4).

Регуляризованный принцип максимума Понтрягина. При каждых $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $(\lambda,\mu)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}_+$ рассмотрим задачу минимизации

$$L^\delta_\gamma(u,\lambda,\mu)\to\inf,\quad u\in\mathcal{D},\quad (\lambda,\mu)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}_+. \tag{3.5}$$

Для ее решения может быть использован классический принцип максимума Понтрягина в простейшей (только с геометрическими ограничениями) задаче оптимального управления [17, § 4.2]. При этом предположим в дополнение к условиям на исходные данные задачи (P^δ), что существует непрерывный на $X\times\mathbb{R}^n$ градиент $\nabla_x\varphi^\delta_2$ функции φ^δ_2.

Введем стандартное обозначение $H^\delta_\gamma\big(t,x,u,\psi,\lambda(t),\mu(t)\big) \equiv \big\langle\psi, A^\delta(t)x + B^\delta(t)u\big\rangle - \big(\big\langle F^\delta(t)x,x\big\rangle + \big\langle G^\delta(t)u,u\big\rangle + \gamma\langle u,u\rangle\big) - \lambda(t)\big(\big\langle\varphi^\delta_1(t),x\big\rangle - h^\delta(t)\big) - \mu(t)\varphi^\delta_2(t,x)$ при $\lambda,\ \mu\in L_2(X)$. Здесь и ниже в случае, если функции $\lambda,\mu\in L_2(X)$ рассматриваются на всем временном интервале $[0,T]$, то полагается, что $\lambda(t)=\mu(t)=0$ при $t\in[0,T]\backslash X$ и одновременно для этих функций, рассматриваемых на более широком интервале, сохраняется прежнее обозначение. Формально полагаем также, что $\varphi^\delta_2(t,x)=0$, $\nabla_x\varphi^\delta_2(t,x)=0$ при $t\in[0,T]\setminus X$. Справедлива [17, § 4.2]

Лемма 3.1. *Как элемент, минимизирующий при дополнительном предположении существования непрерывного градиента $\nabla_x\varphi^\delta_2$ выпуклый регулярный функционал Лагранжа $L^\delta_\gamma(\cdot,\lambda,\mu)$ на множестве $\mathcal{D}$, управление $u^\delta_\gamma[\lambda,\mu]$ при $(\lambda,\mu)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}_+$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина в задаче (3.5), т.е. удовлетворяет при $u=u^\delta_\gamma[\lambda,\mu]$ соотношению максимума при п.в. $t\in[0,T]$*

$$H^\delta_\gamma\big(t,x^\delta[u](t),u(t),\psi(t),\lambda(t),\mu(t)\big) = \max_{v\in U} H^\delta_\gamma\big(t,x^\delta[u](t),v,\psi(t),\lambda(t),\mu(t)\big), \tag{3.6}$$

где $\psi(t),\ t\in[0,T]$ — решение сопряженной задачи

$$\dot\psi = -\nabla_x H^\delta_\gamma\big(t,x^\delta[u](t),u(t),\psi,\nu,\lambda(t),\mu(t)\big),\quad \psi(T)=0 \tag{3.7}$$

при $u=u^\delta_\gamma[\lambda,\mu]$. И, обратно, очевидно, в силу выпуклости задачи (P^0) любой элемент $u\in\mathcal{D}$, удовлетворяющий вместе с некоторыми $(\lambda,\mu)\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}_+$ соотношениям (3.6), (3.7), совпадает с элементом $u^\delta_\gamma[\lambda,\mu]$.

Обозначим через $U^\delta_{\gamma,m}[\lambda,\mu]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих ПМП в задаче (3.5) при сформулированном выше дополнительном условии существования непрерывного градиента $\nabla_x\varphi^\delta_2$. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости $L^\delta_\gamma(\cdot,\lambda,\mu)$, это множество состоит из одного элемента $U^\delta_{\gamma,m}[\lambda,\mu]\equiv u^\delta_{\gamma,m}[\lambda,\mu]$, и справедливо равенство $u^\delta_{\gamma,m}[\lambda,\mu] = u^\delta_\gamma[\lambda,\mu]$. С учетом леммы 3.1 утверждение теоремы 3.1 может быть переписано в форме регуляризованного ПМП.

Теорема 3.2. *Пусть $\gamma^k>0$, $\gamma^k\to 0$, $k\to\infty$ — произвольная фиксированная последовательность. Для существования МПР в задаче (P^0), в независимости от фактов существования или несуществования решения двойственной к (P^0) задачи, необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность $\delta^k>0$,*

$\delta^k \to 0$, $k \to \infty$ и последовательность двойственных переменных $(\lambda^k, \mu^k) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}_+$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$, и выполнялись предельные соотношения (3.1), (3.2) с заменой $u^{\delta^k}_{\gamma^k}[\lambda^k, \mu^k]$ на $u^{\delta^k}_{\gamma^k,m}[\lambda^k, \mu^k]$ (т. е. с заменой на элементы, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина (3.6) при $\delta = \delta^k$, $\gamma = \gamma^k$, $(\lambda, \mu) = (\lambda^k, \mu^k)$). При этом последовательность $u^{\delta^k}_{\gamma^k,m}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, является искомым МПР, и каждая его слабая предельная точка есть решение задачи (P^0). В качестве последовательностей δ^k, (λ^k, μ^k), $k = 1, 2, \ldots$, могут быть взяты последовательности $\delta(\gamma^k)$, $(\lambda^{\delta(\gamma^k),\alpha(\delta(\gamma^k))}_{\gamma^k}, \mu^{\delta(\gamma^k),\alpha(\delta(\gamma^k))}_{\gamma^k})$, $k = 1, 2, \ldots$, генерируемые методом двойственной регуляризации теоремы 2.2. Для них справедливы предельные соотношения (3.3), (3.4).

References

[1] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. пер.:J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, 1972.

[2] А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Факториал Пресс, М., 1997. [A. V. Arutyunov, *Extremum Conditions. Abnormal and Degenerate Problems*, Factorial Publ., Moscow, 1997 (In Russian)].

[3] А. А. Милютин, А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский, *Принцип максимума в оптимальном управлении*, Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. фак-те МГУ, М., 2004. [A. A. Milyutin, A. V. Dmitruk, N. P. Osmolovskii, *Maximum Principle in Optimal Control*, Izd. MGU, Moscow, 2004 (In Russian)].

[4] М. И. Сумин, "Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:1 (2014), 25–49; англ. пер.:M. I. Sumin, "Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems", *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:1 (2014), 22–44.

[5] М. И. Сумин, "Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она дает", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 757–775. [M. I. Sumin, "Why regularization of Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is needed and what it gives", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 757–775 (In Russian)].

[6] М. И. Сумин, "Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах", *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 279–296. [M. I. Sumin, "Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25**:1 (2019), 279–296 (In Russian)].

[7] М. И. Сумин, "Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **49**:12 (2009), 2083–2102; англ. пер.:M. I. Sumin, "Parametric dual regularization for an optimal control problem with pointwise state constraints", *Comput. Math. Math. Phys.*, **49**:12 (2009), 1987–2005.

[8] М. И. Сумин, "Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.:M. I. Sumin, "Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space", *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.

[9] М. И. Сумин, "Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007), 602–625; англ. пер.:M. I. Sumin, "Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem", *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.

[10] М. И. Сумин, "Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управлении с фазовыми ограничениями", *Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления*, XII Всероссийское совещание по проблемам управления

(16-19 июня 2014 г.), Сборник трудов, Изд-во ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, М., 2014, 796–808. [M. I. Sumin, "Stable sequential Pontryagin maximum principle in optimal control problem with state constraints", *Proceedings of XIIth All-Russia Conference on Control Problems*, XIIth All-Russia Conference on Control Problems (Juny, 16-19, 2014), Proceedings, Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, 2014, 796–808 (In Russian)].

[11] Ф. А. Кутерин, М. И. Сумин, "Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении. I. Оптимизация сосредоточенной системы", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **26**:4 (2016), 474–489. [F. A. Kuterin, M. I. Sumin, "The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. I. Optimization of a lumped system", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **26**:4 (2016), 474–489].

[12] Ф. А. Кутерин, М. И. Сумин, "Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении. II. Оптимизация распределенной системы", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **27**:1 (2017), 26–41. [F. A. Kuterin, M. I. Sumin, "The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. II. Optimization of a distributed system", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27**:1 (2017), 26–41].

[13] Ф. А. Кутерин, М. И. Сумин, "Устойчивый итерационный принцип Лагранжа в выпуклом программировании как инструмент для решения неустойчивых задач", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57**:1 (2017), 55–68; англ. пер.:F. A. Kuterin, M. I. Sumin, "Stable iterative Lagrange principle in convex programming as a tool for solving unstable problems", *Comput. Math. Math. Phys.*, **57**:1 (2017), 71–82.

[14] Ф. А. Кутерин, "Об устойчивом принципе Лагранжа в итерационной форме в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых операторных уравнений первого рода", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **20**:5 (2015), 1239–1246. [F. A. Kuterin, "On stable Lagrange principle in iterative form in convex programming and its application for solving unstable operator equations of the first kind", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **20**:5 (2015), 1239–1246 (In Russian)].

[15] Ф. А. Кутерин, М. И. Сумин, "О регуляризованном принципе Лагранжа в итерационной форме и его применении для решения неустойчивых задач", *Матем. моделирование*, **28**:11 (2016), 3–18; англ. пер.:F. A. Kuterin, M. I. Sumin, "On the regularized Lagrange principle in the iterative form and its application for solving unstable problems", *Math. Models Comput. Simul.*, **9**:3 (2017), 328–338.

[16] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: В 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Metody Optimizatsii: V 2-kh. kn.*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].

[17] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.:V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirovv, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1987.

Информация об авторе

Кутерин Фёдор Алексеевич, научный сотрудник отдела геофизической электродинамики. Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: kuterin.f@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6740-2037

Поступила в редакцию 15.07.2020
Поступила после рецензирования 31.08.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Fedor A. Kuterin, Researcher of the Geophysical Electrodynamics Department. Federal Research Center Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russian Federation. E-mail: kuterin.f@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6740-2037

Received 15.07.2020
Reviewed 31.08.2020
Accepted for press 09.09.2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-274-283

УДК 517.929

К оценке значений линейных функционалов на решениях систем с последействием

Владимир Петрович МАКСИМОВ

ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»

614990, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15

To estimating linear functionals values over solutions of systems with aftereffect

Vladimir P. MAKSIMOV

Perm State National Research University

15 Bukirev St., Perm 614990, Russian Federation

Аннотация. Для широкого класса линейных функционально-дифференциальных систем с последействием предлагается конструктивный метод оценки значений линейных функционалов на решениях в условиях неопределенности внешних возмущений. Метод может применяться для оценки решений краевых задач с произвольным конечным числом краевых условий, а также для получения оценок сверху по включению для множеств достижимости в задачах управления относительно заданного целевого вектор-функционала. Внешние возмущения стеснены только заданной системой линейных неравенств, которые предполагаются выполненными всюду на основном промежутке. Основу метода составляют общие результаты теории функционально-дифференциальных уравнений о разрешимости краевых задач с общими краевыми условиями и представлении решений. Задача оценки значений линейных функционалов сводится к обобщенной проблеме моментов. При этом существенную роль играют результаты о свойствах матрицы Коши линейной системы с последействием. Общий вид используемых функционалов позволяет охватить многие актуальные с точки зрения приложений частные случаи многоточечных и интегральных условий, а также их гибридов.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; системы с последействием; краевые задачи; оценки решений

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332_а).

Для цитирования: *Максимов В.П.* К оценке значений линейных функционалов на решениях систем с последействием // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 274–283. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-274-283.

Abstract. For a wide class of linear functional differential systems with Volterra operators, a constructive technique is proposed to obtain estimates of linear functionals values over solutions in conditions of uncertainty of external perturbations. It can be applied to solutions of boundary value problems with arbitrary number of boundary conditions as well as to description of attainability sets in control problems with respect to given on-target functionals. External perturbations are constrained by a given linear inequalities system on the main time segment. The technique is based on the results of general theory of functional differential equations about the solvability of boundary value problems with general linear boundary conditions and the representation of solutions. The problem under consideration is reduced to the generalized moment problem. Therewith the results on the properties of the Cauchy matrix to systems with aftereffect are of essential importance. The general form of functionals allows one to cover many cases being topical in applications such as multipoint, integral ones, as well as hybrids of those.

Keywords: functional differential equations; systems with aftereffect; boundary value problems; estimating solutions

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00332_a).

For citation: Maksimov V. P. K otsenke znacheniy lineynykh funktsionalov na resheniyakh sistem s posledeystviyem [To estimating linear functionals values over solutions of systems with aftereffect]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 274–283. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-274-283. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Посвящается 70-летию со дня рождения профессора Александра Ивановича Булгакова

Введение

При изучении краевых задач и задач управления для функционально-дифференциальных уравнений и/или включений часто возникает вопрос об оценке решений в заданных точках или функционалов от решений в условиях неопределенности при задании правых частей (внешних возмущений) [5, 7, 14, 15]. В этой работе мы предлагаем конструктивный подход к получению таких оценок для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений с последействием. Основную идею подхода поясним на примере краевой задачи

$$(\mathcal{L}x)(t) \;=\; f(t),\; t \in [0,T],\;\; \lambda x \;=\; \beta \tag{0.1}$$

с линейными ограниченными операторами $\mathcal{L}$ и λ, действующими из пространства $AC^n[0,T]$ абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$ в пространства $L^n[0,T]$ суммируемых функций $y : [0,T] \to R^n$ и пространство R^n, соответственно (детальное описание операторов и пространств приводятся ниже). Пусть задача (0.1) однозначно разрешима и

$$x \;=\; Z\beta \;+\; Gf \tag{0.2}$$

— представление ее решения [2]. Рассматривается случай, когда правая часть f неизвестна и информация о ней исчерпывается системой неравенств

$$\Lambda \cdot f(t) \;\leq\; \gamma,\;\; t \in [0,T], \tag{0.3}$$

где Λ — постоянная $(N \times n)$-матрица (предполагается, что множество $\mathcal{V}$ всех решений v системы неравенств $\Lambda v \leq \gamma$ непусто и ограничено). Требуется дать оценку сверху по включению для значений вектор-функционала $\ell : AC^n \to R^{N_1}$ на решениях (0.2), соответствующих всем возможным f, удовлетворяющим (0.3). Для случая двусторонних покомпонентных ограничений $f(t)$ такая оценка анонсирована в [13]. В общем случае оценка может быть получена после сведения задачи к обобщенной проблеме моментов [8] на основе использования представления (0.2). Упомянутая проблема моментов состоит в описании множества всех значений интеграла $\int_0^T M(t)f(t)\,dt$ на функциях f, удовлетворяющих ограничениям (0.3). Теорема 7.1 [8, p. 269] дает решение задачи в терминах моментной матрицы $M(t)$ и множества $\mathcal{V}$. При этом предполагается решение континуума задач линейного программирования. Мы предлагаем реализуемый алгоритм, применение которого позволяет дать внешнюю оценку (оценку сверху по включению) для упомянутого множества значений вектор-функционала. Отметим, что таким образом возникает возможность для краевых задач с неточно заданными правыми частями и конечным числом линейных краевых условий дать описание правых частей краевых условий, для которых краевая задача заведомо не имеет решений. Напомним в связи с этим некоторые сведения из общей теории краевых задач.

Классическая постановка общей краевой задачи для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \;\; t \in [0,T], \tag{0.4}$$

где $A(t)$ — $(n{\times}n)$-матрица с суммируемыми на $[0,T]$ элементами, предполагает исследование вопроса о существовании решений системы (0.1), удовлетворяющих краевым условиям

$$\lambda x = \beta \tag{0.5}$$

с линейным ограниченным вектор-функционалом $\lambda = col(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, определенным на пространстве абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$ (см. ниже). Важную роль в постановке (0.4)–(0.5) играет равенство числа линейно независимых компонент λ_i вектор-функционала в (0.5) и размерности системы (0.4). В таком случае однозначная разрешимость краевой задачи при $f = 0, \beta = 0$ гарантирует однозначную всюду разрешимость задачи (0.4)–(0.5). В противном случае мы имеем дело либо с недоопределенной, либо с переопределенной краевой задачей [12]. Линейные краевые задачи для уравнений с обыкновенными производными, которые не обладают свойством всюду однозначной разрешимости, встречаются в различных приложениях, среди таких приложений отметим некоторые задачи экономической динамики [11, 14]. Результаты о разрешимости и представлении решений для таких задач широко используются при исследовании слабо нелинейных краевых задач [6]. Общие результаты о линейных краевых задачах для абстрактного функционально-дифференциального уравнения изложены в [1], для переопределенных краевых задач основные результаты Л. Ф. Рахматуллиной детально представлены в [1, 3, 4]. Отметим еще, что обсуждаемые вопросы близки к вопросу о разрешимости линейных краевых задач с краевыми условиями-неравенствами, конструктивный подход к исследованию которых представлен в [14].

1. Один класс систем с последействием

В этом разделе мы даем описание рассматриваемой системы с последействием. С одной стороны, она является конкретной реализацией абстрактного функционально-дифференциального уравнения, с другой – охватывает широкий класс динамических моделей с последействием, таких как интегро-дифференциальные, с запаздыванием, дифференциально-разностные и др. (см., например, [10, 14]).

Введем функциональные пространства, используемые ниже. Зафиксируем конечный промежуток $[0,T] \subset R$. Обозначим через $L^n = L^n[0,T]$ пространство суммируемых функций $f : [0,T] \to R^n$ с нормой $||f||_{L^n} = \int_0^T |f(t)|\,dt$ ($|\cdot|$ — норма в R^n), $AC^n = AC^n[0,T]$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to R^n$ с нормой $||x||_{AC^n} = |x(0)| + ||\dot{x}||_{L^n}$.

Рассмотрим функционально-дифференциальную систему

$$\mathcal{L}x \equiv \dot{x} - \mathcal{K}\dot{x} - A(\cdot)x(0) = f, \tag{1.1}$$

где линейный ограниченный оператор $\mathcal{K} : L^n \to L^n$ определен равенством

$$(\mathcal{K}z)(t) = \int_0^t K(t,s)z(s)\,ds, \ \ t \in [0,T],$$

элементы $k_{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $0 \le s \le t \le T$ и таковы, что $|k_{ij}(t,s)| \le u(t)$, $i,j = 1,...,n$, $u \in L^1[0,T]$, элементы $(n \times n)$-матрицы A суммируемы на $[0,T]$. Ниже мы воспользуемся результатами [2, 9, 10] о представлении решений системы (1.1). Однородная система (1.1) ($f(t) = 0$, $t \in [0,T]$) имеет фундаментальную $(n\times n)$-матрицу $X(t)$:

$$X(t) \ = \ E_n \ + \ Y(t),$$

где E_n — единичная $(n\times n)$-матрица, каждый столбец $y_i(t)$ $(n\times n)$-матрицы $Y(t)$ является единственным решением задачи Коши

$$\dot y(t) = \int_0^t K(t,s)\dot v(s)\ ds \ + \ a_i(t), \ y(0) = 0\ , \ t \in [0,T],$$

где $a_i(t)$ — i-й столбец матрицы A.

Решение системы (1.1) с начальным условием $x(0) = 0$ имеет представление

$$x(t) \ = \ (Cf)(t) \ = \ \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds$$

где $C(t,s)$ — матрица Коши [9] оператора $\mathcal{L}$. Эта матрица может быть определена (и построена) как решение системы

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t,s) \ = \ \int_s^t K(t,\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}C(\tau,s)\,d\tau \ + \ K(t,s), \ 0 \le s \le t \le T,$$

с условием $C(s,s) = E_n$. Отметим, что для некоторых классов систем (1.1) матрица Коши может быть построена в явном виде [15]. Свойства матрицы Коши, используемые ниже, подробно исследованы в [10].

Матрица $C(t,s)$ выражается в терминах резольвентного ядра $R(t,s)$, соответствующего ядру $K(t,s)$:

$$C(t,s) \ = \ E_n \ + \ \int_s^t R(\tau,s)\,d\tau. \tag{1.2}$$

Общее решение системы (1.1) имеет вид

$$x(t) \ = \ X(t)\alpha \ + \ \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{1.3}$$

где $\alpha \in R^n$ — вектор произвольных постоянных.

2. Оценка значений функционалов

Напомним общий вид линейного ограниченного вектор-функционала $\ell : AC^n[0,T] \to R^{N_1}$:

$$\ell x = \int_0^T \Phi(s)\dot x(s)\,ds + \Psi x(0). \tag{2.1}$$

Здесь Ψ — постоянная $(N_1 \times n)$-матрица, Φ — $(N_1 \times n)$-матрица с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,\,T]$ элементами.

Будем оценивать значения ℓx на решениях системы (1.1), удовлетворяющих начальному условию $x(0) = 0$ (в силу линейности задачи это не ограничивает общности, но сокращает выкладки), на множестве правых частей f, удовлетворяющих условию (0.3). Для того, чтобы воспользоваться упомянутой выше Теоремой 7.1 [8, p. 269], следует получить явное представление для $\ell x = \ell C f$ с использованием (2.1). Заметим, что интегральность такого представления следует из общего вида линейного ограниченного вектор-функционала, определенного на пространстве $L^n[0,T]$, однако конструктивное решение поставленной задачи требует явного выражения для элементов моментной матрицы $M(t)$. Сформулируем результат в виде следующей леммы.

Лемма 2.1. *Имеет место представление*

$$\ell C f = \int_0^T M(t)\, f(t)\, dt, \tag{2.2}$$

где $(N_1 \times n)$ *-матрица* $M(t)$ *определяется равенством*

$$M(t) \ = \ \Phi(t) \ + \ \int_t^T \Phi(t) \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau, t)\, d\tau. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\ell C f = \int_0^T \Phi(t)\, \dot{x}(t)\, dt = \int_0^T \Phi(t)\, f(t)\, dt + \int_0^T \Phi(t) \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} C(t,s)\, dt\, f(s)\, ds =$$

$$= \int_0^T \Phi(t)\, f(t)\, dt + \int_0^T \int_s^t \Phi(t) \frac{\partial}{\partial t} C(t,s)\, dt\, f(s)\, ds =$$

$$= \int_0^T [\, \Phi(t) \ + \int_t^T \Phi(s) \frac{\partial}{\partial s} C(s,t)\, ds\,]\, f(t)\, dt.$$

В процессе преобразований обоснованность смены порядка интегрирования в повторных интегралах следует из свойств матрицы Коши, – см. [10, Теорема 2.3, с. 53]. □

Ниже всюду будем предполагать, что элементы матрицы $M(t)$ кусочно непрерывны на $[0,T]$. Отметим, что это условие выполнено для многоточечных и интегральных функционалов, а также для их линейных комбинаций.

Для фиксированного $\mu \in R^{N_1}$ и фиксированного $t \in [0,T]$ определим $w(t,\mu)$ равенством

$$w(t,\mu) \ = \ argmax(\mu' M(t) v : v \in \mathcal{V}) \tag{2.4}$$

($(\cdot)'$ – символ транспонирования). Без ограничения общности будем считать, что равенство (2.4) определяет $w(t,\mu)$ (угловую точку многогранника $\mathcal{V}$) однозначно (в противном случае под $w(t,\mu)$ можно понимать фиксированную выпуклую комбинацию всех угловых точек, доставляющих функционалу $v \to \mu' M(t) v$ одно и то же экстремальное значение). Зафиксируем набор векторов $\mu_k, \ k = 1, \ldots, K$. Пусть, далее, упорядоченный набор точек $t_j,\, j = 0, \ldots, J,\, 0 = t_0 < t_1 \le \cdots \le t_J = T$ состоит из точек непрерывности моментной матрицы $M(t)$ и обладает свойством δ-мажорирования интеграла:

$$\int_0^T \mu_k' \, M(t)\, w(t,\mu_k)\, dt \ \le \ \int_0^T \mu_k' \, M(t) \sum_{j=1}^{J} \chi_{[t_{j-1},t_j)}(t) w(t_j,\mu_k)\, dt \ + \ \delta \ = \ q_k, \ k = 1, \ldots, K. \tag{2.5}$$

Здесь и ниже $\chi_A(t)$ — характеристическая функция множества A.

Теорема 2.1. *Какой бы ни была суммируемая функция* f, *удовлетворяющая условиям* (0.3) *почти всюду на* $[0,T]$, *для соответствующего решения* x *системы* (1.1) *значения* ℓx *принадлежат многогранному множеству точек* $\rho \in R^{N_1}$, *которое определяется неравенствами*

$$\mu_k' \rho \le q_k,\ k = 1, \dots, K. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу Теоремы 7.1 [8, p. 269] множество значений интеграла $\int_0^T M(t) f(t)$ на всех f, удовлетворяющих неравенствам (0.3), исчерпывается точками $\rho \in R^{N_1}$, для которых неравенство

$$\mu' \rho \le \int_0^T \mu' M(t)\, w(t, \mu)\, dt \tag{2.7}$$

выполняется для всех $\mu \in R^{N_1}$. По определению значений q_k это множество является подмножеством многогранного множества (2.6). □

3. Примеры

П р и м е р 3.1. Рассмотрим двумерную систему с постоянным запаздыванием

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) - x_2(t-1) &=& f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) + x_2(t) &=& f_2(t), \end{array} \quad t \in [0,3], \tag{3.1}$$

где $x_2(s) = 0$, если $s < 0$, с начальными условиями

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0. \tag{3.2}$$

Информация о правой части системы исчерпывается следующими ограничениями:

$$\begin{array}{c} 0.1 \le f_1(t) \le 0.1,\ 0.1 \le f_2(t) \le 0.2,\ f_2(t) \ge -2f_1(t),\ t \in [0,3]; \\ f_2(t) \ge -2f_1(t),\ f_2(t) \ge 0.1 + f_1(t),\ t \in [0,3];\ f_1(t) = 0,\ t \in [0,1]. \end{array} \tag{3.3}$$

Неравенства в (3.3) определяют многоугольник, изображенный на рис. 1.

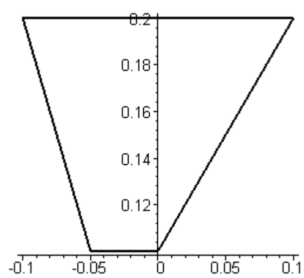

Рис. 1. Ограничения-неравенства на правую часть

Оценим терминальные значения компонент решения задачи (3.1)–(3.2) при произвольной правой части f с условиями (3.3). Таким образом, в данном случае $\ell_1 x \equiv x_1(3)$, $\ell_2 x \equiv x_2(3)$.

Для рассматриваемой системы имеем

$$C(t,s) = \begin{pmatrix} 1 & \int_s^t \chi_{[1,3]}(\tau)\, \chi_{[0,\tau-1]}(s) \exp(1 - \tau + s)\, d\tau \\ & \\ 0 & \exp(s-t) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Найдем элементы моментной матрицы:

$$\ell_1 x = x_1(3) = \int_0^3 C_{11}(3,t) f_1(t)\, dt + \int_0^3 C_{12}(3,t) f_2(t)\, dt =$$

$$= \int_0^3 \chi_{[2,3]}(t) f_1(t)\, dt \ + \ \int_0^3 \chi_{[0,2]}(t)[1 - exp(t-2)] f_2(t)\, dt;$$

$$\ell_2 x = x_2(3) = \int_0^3 C_{21}(3,t) f_1(t)\, dt \ + \ \int_0^3 C_{22}(3,t) f_2(t)\, dt \ =$$

$$= \ 0 \ + \ \int_0^3 exp(t-3) f_2(t)\, dt.$$

Таким образом,

$$M_{11}(t) = \chi_{[2,3]}(t),\ M_{12}(t) = \chi_{[0,2]}(t)[1 - exp(t-2)],\ M_{21}(t) = 0,\ M_{22}(t) = exp(t-3).$$

Применяя Теорему 2.1 и реализуя предлагаемый ею алгоритм, основанный на решении $K \cdot J$ задач линейного программирования, при $\mu_j = col(sin(2\pi(j-1)/K), cos(2\pi(j-1)/K))$, $K = 16$, $J = 32$, и выбирая в качестве 0.01-мажорирующего набора точек равномерную сетку с шагом $3/32$, получаем оценку сверху для множества значений $(x_1(3), x_2(3))$. Множество этих значений находится в многоугольнике, показанном на рис. 2. Алгоритм реализован с использованием свободно распространяемой версии системы аналитических вычислений Maple.

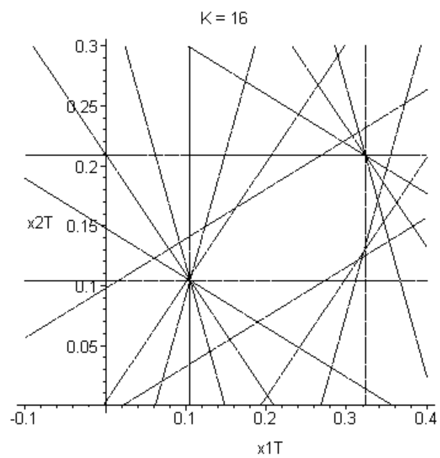

Рис. 2. Оценка множества терминальных значений при $K = 16$

При необходимости эта оценка может быть уточнена, вариант оценки при $K = 32$ показан на рис. 3.

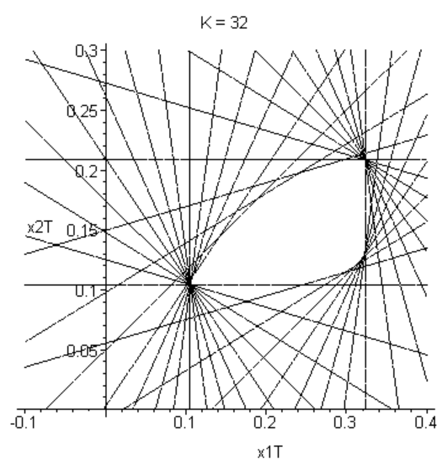

Рис. 3. Оценка множества терминальных значений при $K = 32$

Замечание 3.1. Отметим, что в некоторых случаях предлагаемые оценки позволяют установить положительность значений компонент оцениваемого вектор-функционала в условия отсутствия монотонности операторов или положительности правых частей системы. Так, в рассматриваемом примере компонента $f_1(t)$ может принимать отрицательные значения (см. рис. 1), но терминальные значения обеих компонент решения положительны.

Пример 3.2. В этом примере для задачи (3.1)–(3.2) мы получим оценку значений вектор-функционала ℓ с компонентами

$$\ell_1 x \equiv \int_0^3 t x_1(t)\,dt \;+\; x_2(3), \quad \ell_2 x \equiv x_1(3) \;+\; \int_0^3 x_2(t)\,dt$$

при следующих ограничениях на правую часть $f(t)$:

$$\begin{gathered} 0.1 \le f_1(t) \le 0.1, \;\; 0.1 \le f_2(t) \le 0.2, \;\; f_2(t) \ge -2f_1(t), \\ f_2(t) \ge 0.1 + f_1(t), \;\; f_1(t) + f_2(t) \le 0.2, \;\; t \in [0,3]. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Многоугольник, определяемый неравенствами (3.5), показан на рис. 4.

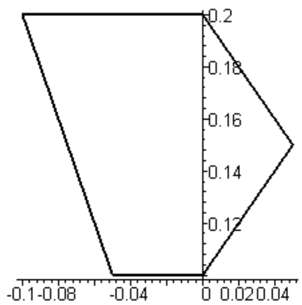

Рис. 4. Ограничения-неравенства на правую часть

Используя матрицу Коши (3.4), после элементарных преобразований получаем для $\ell_1 x$ и $\ell_1 x$:

$$\ell_1 x = \int_0^3 0.5(9-t^2) f_1(t)\,dt \;+\; \int_0^3 \chi_{[0,2]}(t)[0.5(9-t^2) + 4exp(t-2) - t(e+1) + exp(t-3)] f_2(t)\,dt,$$

$$\ell_2 x = \int_0^3 f_1(t)\,dt \;+\; \int_0^3 [\chi_{[0,2]}(t)(1-exp(t-2)) + exp(t) - exp(t-3)] f_2(t)]\,dt.$$

Эти равенства определяют элементы моментной матрицы $M(t)$:

$$M_{11}(t) = 0.5(9-t^2),\; M_{12}(t) = \chi_{[0,2]}(t)[\,0.5(9-t^2) + 4exp(t-2) - (t+1)e + exp(t-3)\,],$$

$$M_{21}(t) = 1,\; M_{22}(t) = \chi_{[0,2]}(t)(1-exp(t-2)) + exp(t) - exp(t-3).$$

Многоугольник, содержащий все возможные значения компонент вектор-функционала $\ell = col(\ell_1, \ell_2)$, показан на рис. 5.

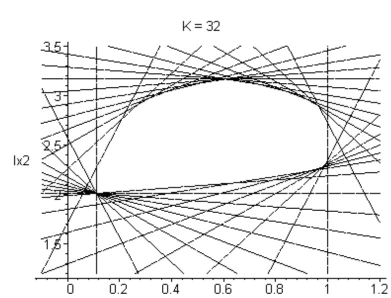

Рис. 5. Оценка значений вектор-функционала

References

[1] N. V. Azbelev, L. F. Rakhmatullina, “Theory of linear abstract functional differential equations and applications”, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **8** (1996), 1–102.

[2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov and L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations*, Nauka, Moscow, 1991 (In Russian)].

[3] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М., 2002. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov and L. F. Rakhmatullina, *Elements of the Contemporary Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, Institute of Computer-Assisted Studies, Moscow, 2002 (In Russian)].

[4] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov and L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications*, Hindawi Publishing Corporation, New York–Cairo, 2007.

[5] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов, “Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2009, № 1, 3–23; англ. пер.:N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, “Functional differential equations and applications”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **69**:2 (2011), 203–235.

[6] A. A. Boichuk, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наукова думка, Киев, 1990. [A. A. Boichuk, *Constructive Methods of Analysis of Boundary Value Problems*, Naukova Dumka, Kyiv, 1990 (In Russian)].

[7] А. И. Булгаков, В. П. Максимов, “Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами”, *Дифференциальные уравнения*, **17**:8 (1981), 1362–1374; англ. пер.:A. I. Bulgakov, V. P. Maksimov, “Functional and functional differential inclusions with Volterra operators”, *Differential Equations*, **17**:8 (1981), 881–890.

[8] M. G. Krein, A. A. Nudelman, *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*, American Mathematical Society, New York, 1977.

[9] В. П. Максимов, “О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения”, *Дифференциальные уравнения*, **13**:4 (1977), 601–606; англ. пер.:V. P. Maksimov, “The Cauchy formula for a functional-differential equation”, *Differential Equations*, **13**:4 (1977), 405–409.

[10] В. П. Максимов, *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений*, Изд-во Перм. ун-та, Пермь, 2003. [V. P. Maksimov, *Questions of the General Theory of Functional Differential Equations*, Perm State University, Perm, 2003 (In Russian)].

[11] V. P. Maksimov, “Theory of functional differential equations and some problems in economic dynamics”, *Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications*, eds. R. Agarwal, K. Perera, 2006, 757–765.

[12] V. P. Maksimov, “Linear overdetermined boundary value problems in Hilbert space”, *Boundary Value Problems*, **140** (2014).

[13] V. P. Maksimov, “On unreachable values of boundary functionals for overdetermined boundary value problems with constraints”, *International Workshop QUALITDE – 2018*, International Workshop QUALITDE -2018 (Tbilisi State University, Tbilisi, December 1-3, 2018), Tbilisi State University, Tbilisi, 2018, 127–131.

[14] V. P. Maksimov, A. N. Rumyantsev, “Boundary value problems and problems of pulse control in economic dynamics: constructive study”, *Russian Mathematics (Izv.VUZ)*, **37**:5 (1993), 48–62.

[15] В. П. Максимов, “К вопросу о построении и оценках матрицы Коши для систем с последействием”, *Труды института математики и механики УрО РАН*, **25**:3 (2019), 153–162. [V. P. Maksimov, “On the construction and estimates of the Cauchy matrix for systems with aftereffect”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 153–162 (In Russian)].

Информация об авторе

Максимов Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике. Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация. E-mail: maksimov@econ.psu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0051-3696

Поступила в редакцию 06.07.2020
Поступила после рецензирования 14.08.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Vladimir P. Maksimov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department. Perm State National Research University, Perm, Russian Federation. E-mail: maksimov@econ.psu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0051-3696

Received 06.07.2020
Reviewed 14.08.2020
Accepted for press 09.09.2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-284-289

УДК 517.95

О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования

Гарик Гагикович ПЕТРОСЯН

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий»

394036, Российская Федерация, г. Воронеж, проспект Революции, 19

On adjoint operators for fractional differentiation operators

Garik G. PETROSYAN

Voronezh State University of Engineering Technologies

19, Revolutsii Prospect, Voronezh, 394036, Russian Federation

Аннотация. На линейном многообразии пространства суммируемых с квадратом на конечном отрезке функций, обнуляющихся в его концах, рассматривается оператор левостороннего дробного дифференцирования Капуто. Показано, что сопряженным для этого оператора является оператор правостороннего дробного дифференцирования Капуто. Аналогичные результаты устанавливаются для операторов дробного дифференцирования Римана–Лиувилля. Также мы показываем, что оператор, представляющийся в виде суммы левостороннего и правостороннего операторов дробного дифференцирования, является самосопряженным. Для обоснования результатов используются известные свойства дробных производных Капуто и Римана–Лиувилля.

Ключевые слова: дробная производная Капуто; дробная производная Римана–Лиувилля; сопряженный оператор; суммируемая с квадратом функция

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-31-60011).

Для цитирования: *Петросян Г.Г.* О сопряженных операторах для операторов дробного дифференцирования // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 284–289. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-284-289.

Abstract. On a linear manifold of the space of square summable functions on a finite segment vanishing at its ends, we consider the operator of left-sided Caputo fractional differentiation. We prove that the adjoint for it is the operator of right-sided Caputo fractional differentiation. Similar results are established for the Riemann–Liouville fractional differentiation operators. We also demonstrate that the operator, which is represented as the sum of the left-sided and the right-sided fractional differentiation operators is self adjoint. The known properties of the Caputo and Riemann–Liouville fractional derivatives are used to substantiate the results.

Keywords: Caputo fractional derivative; Riemann–Liouville fractional derivative; adjoint operator; square summable function

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-31-60011).

For citation: Petrosyan G.G. O sopryazhennykh operatorakh dlya operatorov drobnogo differentsirovaniya [On adjoint operators for fractional differentiation operators]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 284–289. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-284-289. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Г. В. Лейбница и Л. Эйлера, но лишь к концу XX века внимание к этой тематике значительно усилилось, благодаря интересным приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. (см. монографии [1, 2], статьи [3, 4]). На данный момент разработаны различные подходы к разрешимости дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$. Например, в работах [5, 6] для указанного дробного порядка были разрешены задачи типа Коши для дифференциальных уравнений. Статьи [7, 8] посвящены исследованию траекторий дифференциальных включений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$, подчиняющихся обобщенным краевым условиям, выраженным в форме операторных включений. В работах [9, 10] авторы приводят доказательства разрешимости периодических краевых задач для дифференциальных включений того же порядка. Аппроксимации решений дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$, были изучены в статьях [11, 12].

В последние годы активно исследуются дифференциальные уравнения и включения дробного порядка $\alpha > 1$. Естественно, основным аппаратом для исследования таких задач является классический функциональный анализ. Например, Ph. Clement, S.-O. Londen и P. Egberts в работах [13, 14] используют для разрешимости полулинейных дифференциальных уравнений дробного порядка теорию сопряженных операторов в гильбертовом пространстве. При этом авторы в данных статьях не выписывают в явном виде сопряженный оператор для оператора дробного дифференцирования, а лишь предполагают его существование в каком-то неизвестном виде. В настоящей работе мы покажем, что для оператора левостороннего дробного дифференцирования Капуто, сопряженным является оператор правостороннего дробного дифференцирования Капуто. Более того, оператор, представимый в виде суммы операторов левостороннего и правостороннего дробного дифференцирования Капуто, является самосопряженным. Аналогичные результаты справедливы и для операторов дробного дифференцирования Римана–Лиувилля.

1. Понятия и факты из дробного математического анализа

Вначале введем необходимые понятия и обозначения из дробного математического анализа (более подробные сведения можно найти в монографиях [1, 2]).

Пусть $AC[a,b]$ — пространство всех вещественных абсолютно непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. Для натурального числа n обозначим через $AC^n[a,b]$ пространство всех вещественных функций f на отрезке $[a,b]$, имеющих непрерывные производные до $n-1$ порядка и таких, что $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$, при $n=1$, $AC^1[a,b] = AC[a,b]$. Классически будем считать $C^n[a,b]$ пространством всех вещественных n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$, а пространство суммируемых с

p-й степенью функций на отрезке $[a,b]$ обозначается через $L^p[a,b], 1 \le p < \infty$.

Определение 1.1. Левосторонним дробным интегралом порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in L^1[a,b]$ называется функция $I^\alpha_{a+}f$ следующего вида:

$$I^\alpha_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Определение 1.2. Правосторонним дробным интегралом порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in L^1[a,b]$ называется функция $I^\alpha_{b-}f$ следующего вида:

$$I^\alpha_{b-}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s)\, ds.$$

Определение 1.3. Левосторонней дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in AC^n[a,b]$ называется функция ${}^{RL}D^\alpha_{a+}f$ следующего вида:

$${}^{RL}D^\alpha_{a+}f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha}_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Определение 1.4. Правосторонней дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in AC^n[a,b]$ называется функция ${}^{RL}D^\alpha_{b-}f$ следующего вида:

$${}^{RL}D^\alpha_{b-}f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n I^{n-\alpha}_{b-}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Определение 1.5. Левосторонней дробной производной Капуто порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in C^n[a,b]$ называется функция ${}^{C}D^\alpha_{a+}f$ следующего вида:

$${}^{C}D^\alpha_{a+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Определение 1.6. Правосторонней дробной производной Капуто порядка $\alpha \ge 0$ функции $f \in C^n[a,b]$ называется функция ${}^{C}D^\alpha_{b-}f$ следующего вида:

$${}^{C}D^\alpha_{b-}f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \quad n = [\alpha]+1.$$

Дробные производные Капуто порядка $\alpha \ge 0$ для функции f на отрезке $[a,b]$ связаны с дробными производными Римана–Лиувилля того же порядка $\alpha \ge 0$ посредством следующих соотношений:

$${}^{C}D^\alpha_{a+}f(t) = \Big({}^{RL}D^\alpha_{a+}\big(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\big)\Big)(t), \tag{1.1}$$

$${}^{C}D^\alpha_{b-}f(t) = \Big({}^{RL}D^\alpha_{b-}\big(f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-s)^k\big)\Big)(t), \tag{1.2}$$

где $n = [\alpha]+1$.

Отметим, что большим преимуществом дробной производной Капуто, по сравнению с дробной производной Римана–Лиувилля, является сохранение основных свойств производной целого порядка, например, равенство нулю производной от константы.

В дробном исчислении немаловажную роль играют функции представимые в виде левостороннего (правостороннего) дробного интеграла от функции из $L^p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$. Классы таких функций обозначают соответственно $I^\alpha_{a+}(L^p)$ и $I^\alpha_{b-}(L^p)$. Известно (см. [1]), что справедливы включения $I^\alpha_{a+}(L^p) \subset L^p[a,b]$ и $I^\alpha_{b-}(L^p) \subset L^p[a,b]$, более того при условии $\alpha > \frac{1}{p}$ функции из данных множеств являются непрерывными (гельдеровскими). Для функции $y \in I^\alpha_{a+}(L^1)$ справедливо соотношение

$$I^\alpha_{a+}\, {}^{RL}D^\alpha_{a+} y(t) = y(t),$$

соответственно для функции $y \in I^\alpha_{b-}(L^1)$ справедливо соотношение

$$I^\alpha_{b-}\, {}^{RL}D^\alpha_{b-} y(t) = y(t).$$

В тоже время (см. [2]), если $y \in C^n[a,b]$, то выполняются равенства

$$I^\alpha_{a+}\, {}^{C}D^\alpha_{a+} y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \tag{1.3}$$

$$I^\alpha_{b-}\, {}^{C}D^\alpha_{b-} y(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k. \tag{1.4}$$

2. Полученные результаты

Для определения явного вида сопряженного оператора для операторов дробного дифференцирования вначале докажем следующее утверждение о равенстве интегралов для дробных производных Капуто.

Теорема 2.1. *Пусть для $\alpha > 0$ и $n = [\alpha] + 1$ выполняются следующие условия:*

1) функции $x, y \in C^n[a,b]$;

2) $x^{(k)}(a) = 0, k = 0,1,2,...,n-1$; $y^{(k)}(b) = 0, k = 0,1,2,...,n-1$;

3) ${}^{C}D^\alpha_{a+}x$, ${}^{C}D^\alpha_{b-}y \in L^1[a,b]$, при $\alpha \geq 1$;

4) ${}^{C}D^\alpha_{a+}x$, ${}^{C}D^\alpha_{b-}y \in L^2[a,b]$, при $0 < \alpha < 1$.

Тогда

$$\int_a^b y(t)\, {}^{C}D^\alpha_{a+} x(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, {}^{C}D^\alpha_{b-} y(t)\, dt. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся следующим соотношением, которое называют формулой дробного интегрирования по частям (см. [1]):

$$\int_a^b \varphi(t) I^\alpha_{a+} \psi(t)\, dt = \int_a^b \psi(t) I^\alpha_{b-} \varphi(t)\, dt, \tag{2.2}$$

где $\varphi \in L^p[a,b]$, $\psi \in L^q[a,b]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$, $p \geq 1, q \geq 1$.

Очевидно, что при $\alpha \geq 1$ равенство (2.2) верно для всех функций $\varphi, \psi \in L^p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$, а при $0 < \alpha < 1$, равенство (2.2) верно для функций $\varphi, \psi \in L^p[a,b]$, $p \geq 2 \geq \frac{2}{1+\alpha}$.

Пусть $\alpha \geq 1$. Для функций $x, y \in C^n[a,b]$ определим $\varphi =^C D^\alpha_{b-} y$ и $\psi =^C D^\alpha_{a+} x$. Для этих функций формула (2.2) принимает вид:

$$\int_a^b {}^C D^\alpha_{b-} y(t) \cdot I^\alpha_{a+} \, {}^C D^\alpha_{a+} x(t)\, dt = \int_a^b {}^C D^\alpha_{a+} x(t) \cdot I^\alpha_{b-} \, {}^C D^\alpha_{b-} y(t)\, dt, \tag{2.3}$$

где ${}^C D^\alpha_{a+} x$, ${}^C D^\alpha_{b-} y \in L^1[a,b]$.

В силу равенств (1.3), (1.4), а также условия 2) теоремы, мы получаем (2.1).

Очевидно, что таким же образом можно установить справедливость (2.1) для $0 < \alpha < 1$, считая ${}^C D^\alpha_{a+} x$, ${}^C D^\alpha_{b-} y \in L^2[a,b]$.

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{L} \subset L^2[a,b]$,

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in C^n[a,b] \,|\, x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0,\ k = 0,1,2,...,n-1 \right\},$$

для которого $\overline{\mathcal{L}} = L^2[a,b]$.

Для функций $x \in \mathcal{L}$, в силу равенств (1.3), (1.4) мы имеем:

$$I^\alpha_{a+} \, {}^C D^\alpha_{a+} x(t) = x(t),$$

$$I^\alpha_{b-} \, {}^C D^\alpha_{b-} x(t) = x(t).$$

Отметим также, что для функций $x \in \mathcal{L}$ в силу соотношений (1.1), (1.2), мы имеем

$${}^C D^\alpha_{a+} x =^{RL} D^\alpha_{a+} x,\ {}^C D^\alpha_{b-} x =^{RL} D^\alpha_{b-} x,$$

поэтому равенство (2.1) при наложенных в теореме 2.1 условиях, справедливо и для дробных производных Римана–Лиувилля:

$$\int_a^b y(t) \, {}^{RL} D^\alpha_{a+} x(t)\, dt = \int_a^b x(t) \, {}^{RL} D^\alpha_{b-} y(t)\, dt. \tag{2.4}$$

Из равенства (2.1) следует, что на линейном многообразии $\mathcal{L}$ операторы ${}^C D^\alpha_{a+}$ и ${}^C D^\alpha_{b-}$ являются сопряженным. Соответственно из (2.4) следует, что на линейном многообразии $\mathcal{L}$ операторы ${}^{RL} D^\alpha_{a+}$ и ${}^{RL} D^\alpha_{b-}$ также являются сопряженными.

Если же мы на $\mathcal{L}$ будем рассматривать оператор ${}^C D^\alpha_{a+} +^C D^\alpha_{b-}$, то легко можно показать, что он является самосопряженным:

$$\int_a^b y(t)\, ({}^C D^\alpha_{a+} +^C D^\alpha_{b-}) x(t)\, dt = \int_a^b y(t) \, {}^C D^\alpha_{a+} x(t)\, dt + \int_a^b y(t) \, {}^C D^\alpha_{b-} x(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b x(t) \, {}^C D^\alpha_{b-} y(t)\, dt + \int_a^b x(t) \, {}^C D^\alpha_{a+} y(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, ({}^C D^\alpha_{a+} +^C D^\alpha_{b-}) y(t)\, dt,$$

где $x, y \in \mathcal{L}$.

Очевидно, аналогично можно показать, что оператор ${}^{RL} D^\alpha_{a+} +^{RL} D^\alpha_{b-}$ является самосопряженным на $\mathcal{L}$.

References

[1] S. G. Samco, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V., North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 2006.

[3] F. Mainardi, S. Rionero, T. Ruggeri, "On the initial value problem for the fractional diffusionwave equation", *Waves and Stability in Continuous Media*, 1994, 246–251.

[4] M. Afanasova, Y. Ch. Liou, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, "On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **20**:9 (2019), 1919–1935.

[5] J. Appell, B. Lopez, K. Sadarangani, "Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives", *J. Nonlinear Var. Anal.*, 2018, № 2, 25–33.

[6] T. D. Ke, N.V. Loi, V. Obukhovskii, "Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2015, № 18, 531–553.

[7] М. С. Афанасова, Г. Г. Петросян, "О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с обобщенным начальным условием в банаховом пространстве", *Известия вузов. Математика*, 2019, № 9, 3–15; англ. пер.:M. Afanasova, G. Petrosyan, "On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space", *Russian Mathematics*, **63**:9 (2019), 1–11.

[8] I. Benedetti, V. Obukhovskii, V. Taddei, "On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, № 20, 1424–1446.

[9] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space", *Applicable Analysis*, **97**:4 (2018), 571–591.

[10] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional–Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space", *Mathematics, Special Issue "Fixed Point, Optimization, and Applications"*, **7**:12 (2019), 5–19.

[11] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions", *Fixed Point Theory and Applications*, 2019, № 2.

[12] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, **28**:4 (2017), 1–28.

[13] Ph. Clement, S.-O. Londen, "On the sum of fractional derivatives and m-accretive operators", *Mathematical Research*, **64** (1994), 91–100.

[14] P. Egberts, "On the sum of maximal monotone operators and an application to a nonlinear integro-differential equation", *Differential Integral Equations*, **6**:5 (1993), 1187–1194.

Информация об авторе

Петросян Гарик Гагикович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научно-образовательного центра. Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8154-6299

Поступила в редакцию 29.06.2020
Поступила после рецензирования 10.08.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Garik G. Petrosyan, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher of the Research Center. Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russian Federation. E-mail:garikpetrosyan@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8154-6299

Received 29.06.2020
Reviewed 10.08.2020
Accepted for press 09.09.2020

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-290-298
УДК 517.977

Об одном представлении множества разрешимости в задаче удержания

Дмитрий Александрович СЕРКОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

On a representation of the solvability set in the retention problem

Dmitriy A. SERKOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Аннотация. В работе приводится еще один итерационный способ построения разрешающего множества в игровой задаче удержания движений абстрактной динамической системы в заданных фазовых ограничениях. В итерационной процедуре вместо оператора программного поглощения предлагается использовать семейство операторов поглощения для отдельных программных помех. Такой подход к построению множества разрешимости опирается на теоремы о существовании и представлении общих неподвижных точках семейства отображений.

Ключевые слова: метод программных итераций; игровая задача удержания; общие неподвижные точки

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00410_а).

Для цитирования: *Серков Д.А.* Об одном представлении множества разрешимости в задаче удержания // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 290–298. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-290-298.

Abstract. The paper provides another iterative method for constructing a resolving set in the game problem of retaining the movements of an abstract dynamic system in given phase constraints. In the iterative procedure, instead of the program absorption operator, it is proposed to use a family of absorption operators for individual program disturbances. Such an approach is based on theorems on the existence and representation of common fix-points of a family of mappings.

Keywords: method of programmed iterations; game problem of retention; common fix-points

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Fund for Basic Research (project no. 18-01-00410_a).

For citation: Serkov D.A. Ob odnom predstavlenii mnozhestva razreshimosti v zadache uderzhaniya [On a representation of the solvability set in the retention problem]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 290–298. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-290-298. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Активно используемый в теории дифференциальных игр (см. [1,2]) метод программных итераций (см. [3–5]) опирается на существование неподвижной точки подходящего оператора программного поглощения (ОПП). Этот оператор, рассматриваемый как преобразование булеана фазовых состояний управляемой системы, является нижней (в смысле отношения вложения) огибающей семейства операторов поглощения фиксированных допустимых реализаций помехи. Из этого обстоятельства и свойства сужаемости рассматриваемых операторов следует, что неподвижные точки ОПП суть в точности общие неподвижные точки семейства операторов поглощения для отдельных помех. Можно пойти дальше, заметив, что у любых двух таких семейств сужающих отображений, имеющих одинаковую нижнюю огибающую, множества общих неподвижных точек совпадают. То есть, любое семейство сужающих операторов (порожденное некоторым п/м помех) и имеющее рассматриваемый ОПП своей нижней огибающей, дает описание неподвижных точек этого ОПП. Известно (см., например, [6]), что для представления общих неподвижных точек семейства отображений также применимы итерационные пределы. Таким образом, при подходящих обстоятельствах мы можем на шаге итерационной процедуры перейти от ОПП к оператору поглощения при фиксированной помехе из выбранного п/м помех. Итак, появляется возможность подбирать наиболее удобное с той или иной точки зрения п/м помех и получать соответствующее представление решения исходной дифференциальной игры.

Формальное изложение мы проведем в рамках игровой задачи удержания для абстрактной динамической системы [7] и проиллюстрируем на примере системы с простыми движениями. Дальнейший текст организован так: пункт 1 содержит обозначения и определения общего характера, 2 — сведения из теории неподвижных точек, 3 — постановка задачи удержания и основные результаты, 4 — пример.

1. Обозначения и определения общего характера

Используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество); $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N}$ — натуральный ряд.

Через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) условимся обозначать семейство всех (всех непустых) п/м произвольного множества T; семейство $\mathcal{P}(T)$ именуем также булеаном множества T. Если A и B — непустые множества, то B^A есть множество всех отображений из A в B (см. [8, с. 77]). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f\,|\,C) \in B^C$ есть сужение f на множество C: $(f\,|\,C)(x) \triangleq f(x)\ \ \forall x \in C$. В случае, когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $\big(F\,|\,C\big) \triangleq \{(f\,|\,C) : f \in F\}$.

Всякое линейно упорядоченное п/м частично упорядоченного множества (ЧУМ) назовем *цепью*. Назовем ЧУМ $(X, \preccurlyeq)$ *индуктивным*, если всякая его цепь C (в том числе и пустая) имеет нижнюю грань $\inf C \in X$. Для $Y \in \mathcal{P}(X)$ обозначим $\top_Y$ и $\bot_Y$ наибольший и наименьший элементы ЧУМ Y, соответственно, если они существуют. Отметим, что в индуктивном ЧУМ существует наибольший элемент — это нижняя грань пустой цепи.

Для отображения $f \in X^X$ обозначим $\mathbf{Fix}(f)$ множество всех его неподвижных точек: $\mathbf{Fix}(f) \triangleq \{x \in X \mid f(x) = x\}$. Если $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(X^X)$, то $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \triangleq \cap_{f\in\mathbf{F}}\mathbf{Fix}(f)$. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — ЧУМ и $f \in X^X$. Назовем f — *сужающим на* $(X, \preccurlyeq)$, если $f(x) \preccurlyeq x \quad \forall x \in X$. Назовем f — *изотонным на* $(X, \preccurlyeq)$, если $(x \preccurlyeq x') \Rightarrow (f(x) \preccurlyeq f(x')) \quad \forall x, x' \in X$.

Будем обозначать $\mathbf{ORD}$ класс порядковых чисел (ординалов). Запись $\alpha \in \mathbf{ORD}$ будем рассматривать как сокращение высказывания «α есть порядковое число» («α есть ординал»). Отношение порядка (строгого порядка) на классе $\mathbf{ORD}$ будем обозначать $\preccurlyeq$ ($\prec$). Для всякого $\alpha \in \mathbf{ORD}$ обозначим $\mathbf{W}(\alpha) \triangleq \{\iota \in \mathbf{ORD} \mid \iota \prec \alpha\}$ ($\mathbf{W}_+(\alpha) \triangleq \mathbf{W}(\alpha) \cup \{\alpha\}$) множество всех ординалов меньших (не больших), чем α. Обозначим $\alpha + 1 \in \mathbf{ORD}$ — *последователя* ординала α — наименьший из ординалов, превосходящих α. Последователь всегда существует (см. [8, следствие 8, с. 238] при $Z = \mathbf{W}(\alpha) \cup \{\alpha\}$). Назовем $\alpha \in \mathbf{ORD}$ *регулярным*, если в $\mathbf{W}(\alpha)$ существует наибольший ординал — *предшественник* α; в остальных случаях будем называть α *предельным*. Для всякого множества X обозначим $|X|$ наименьший из ординалов равномощных множеству X. При этом через $|X|^+$ обозначим наименьший из ординалов, превосходящих мощность множества X. В силу данных определений, каково бы ни было множество X невозможно взаимно однозначно отобразить множество ординалов $\mathbf{W}_+(|X|^+)$ в X. Для выбранного множества X будем кратко обозначать этот факт соотношением
$$|X| < |X|^+. \tag{1.1}$$

Для всяких множества X и ординала $\alpha \in \mathbf{ORD}$ назовем α-*последовательностью в* X (α_+-*последовательностью в* X) и обозначим $(x_\iota)_{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($(x_\iota)_{\mathbf{W}_+(\alpha)}$) всякое отображение $\mathbf{W}(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$ ($\mathbf{W}_+(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$) из множества отображений $X^{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($X^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$). Иногда будем также называть α-последовательностью множество $\{x_\iota : \iota \in \mathbf{W}(\alpha)\}$ значений этого отображения.

2. Композиции отображений и представление неподвижных точек в ЧУМ

Хотя приводимые в этом пункте построения и утверждения корректны в произвольном индуктивном ЧУМ (см. [6, п. 2]), для дальнейшего изложения нам потребуется только случай булеана некоторого множества: предположим, что рассматриваемое ЧУМ $(X, \leq)$ имеет вид $(X, \leq) \triangleq (\mathcal{P}(H), \subset)$, $H \neq \varnothing$.

Пусть $\mathbf{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ и $\alpha \in \mathbf{ORD}$. Для любой α_+-последовательности $\phi \triangleq (f_\beta)_{\beta\in\mathbf{W}_+(\alpha)} \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}$ во множестве $\mathbf{F}$ определим α_+-последовательность отображений $(\phi_\beta)_{\beta\in\mathbf{W}_+(\alpha)}$ (назовем их β-композициями — композиций первых β отображений из α_+-последовательности ϕ): при $\beta = 0$ для всякого f_0 положим ϕ_0 — тождественное отображение $\mathcal{P}(H)$ в себя. Таким образом, $\phi_0 \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Пусть теперь отображение $\phi_\eta \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ определено при всех $\eta \in \mathbf{W}(\beta)$. Если β имеет предшественника (пусть это порядковое число γ), то положим $\phi_\beta \triangleq f_\beta \circ \phi_\gamma$. Если β — предельное порядковое число, то положим $\phi_\beta(B) \triangleq f_\beta\left(\bigcap_{\eta\in\mathbf{W}(\beta)} \phi_\eta(B)\right) \ \forall B \in \mathcal{P}(H)$. В обоих случаях отображение ϕ_β определено корректно и $\phi_\beta \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Итак, в силу принципа трансфинитной индукции, β-композиция $\phi_\beta \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ определена однозначно для любого $\beta \in \mathbf{W}_+(\alpha)$. В частности, мы можем рассмотреть множество α-композиций всех α_+-последовательностей семейства $\mathbf{F}$ (обозначим его через $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]$): $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}] \triangleq \{\phi_\alpha \mid$

$\phi \in \mathbf{F}^{\mathbf{W}_+(\alpha)}\}$. Для всякого $x \in X$ определим множество образов x при действии отображениями из $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]$: $\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}](x) \triangleq \{\psi(x) \mid \psi \in \mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]\}$. Сразу отметим, что введенные итерации семейства $\mathbf{F}$ наследуют свойства сужаемости и изотонности, если эти свойства имело семейство $\mathbf{F}$. Кроме того, для произвольного ординала α, выполняется вложение

$$\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \subset \mathbf{Fix}(\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]). \tag{2.1}$$

В самом деле, индукцией по «сложности» композиции устанавливается, что при любых $\alpha \in \mathbf{ORD}$, $\psi \in \mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}]$ и $x \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ выполняется равенство $x = \psi(x)$, то есть $x \in \mathbf{Fix}(\mathrm{ITER}_\alpha[\mathbf{F}])$. В силу произвольного выбора x получаем вложение (2.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ — *множество сужающих отображений на* $(\mathcal{P}(H), \subset)$. *Тогда для любого* $M \in \mathcal{P}(H)$ *выполняется*

$$\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \cap \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}](M) \neq \varnothing. \tag{2.2}$$

В частности, $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \neq \varnothing$.

Приведем схему доказательства этого утверждения. Легко проверяется, что при $M \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ равенство (2.2) верно. Для доказательства утверждения в случае $M \in \mathcal{P}(H) \setminus \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ предположим противное: найдется $\bar{M} \in \mathcal{P}(H) \setminus \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ такое, что для любого $\psi \in \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}]$ существует $f \in \mathbf{F}$, для которого выполняется

$$f(\psi(\bar{M})) \neq \psi(\bar{M}). \tag{2.3}$$

Отталкиваясь от предположения (2.3), рассуждениями «от противного» построим $(|H|^+)_+$-последовательность $(M_\iota)_{\mathbf{W}_+(|H|^+)}$ в $\mathcal{P}(H)$ со следующими свойствами:

$$(\iota' \prec \iota) \Rightarrow ((M_\iota \subset M_{\iota'}) \& (M_\iota \neq M_{\iota'})) \qquad \forall \iota, \iota' \in \mathbf{W}_+(|H|^+). \tag{2.4}$$

Продолжая эти построения еще на один шаг, для ординала $|H|^+ + 1$ получим множество $M_{|H|^+ + 1}$ такое, что $M_{|H|^+ + 1} \subset M_{|H|^+}$ и $M_{|H|^+ + 1} \neq M_{|H|^+}$. Отсюда следует, что

$$M_{|H|^+} \neq \varnothing. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что для $(|H|^+)_+$-последовательности $(L_\iota)_{\iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+)}$ вида

$$L_{|H|^+} \triangleq M_{|H|^+}, \quad L_\iota \triangleq M_\iota \setminus M_{\iota+1}, \qquad \iota \in \mathbf{W}(|H|^+)$$

справедливы соотношения

$$L_\iota \neq \varnothing \qquad \forall \iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+), \tag{2.6}$$

$$L_\zeta \cap L_\xi = \varnothing \qquad \forall \zeta, \xi \in \mathbf{W}_+(|H|^+),\ \zeta \neq \xi. \tag{2.7}$$

Воспользуемся аксиомой выбора и определим $(|H|^+)_+$-последовательность $(l_\iota)_{\iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+)}$ в H следующим образом:

$$l_\iota \in L_\iota \qquad \iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+). \tag{2.8}$$

Ввиду (2.6) это сделать можно. В силу (2.8), (2.7) имеем соотношения

$$l_\iota \in H, \qquad l_\iota \neq l_\eta \qquad \iota, \eta \in \mathbf{W}_+(|H|^+), \ \iota \neq \eta. \tag{2.9}$$

В силу (2.9) $(|H|^+)_+$-последовательность $(l_\iota)_{\iota \in \mathbf{W}_+(|H|^+)}$ есть взаимно однозначное отображение из $\mathbf{W}_+(|H|^+)$ в H, что противоречит выбору $|H|^+$ (см. (1.1)). Значит, предположение (2.3) было ложным и, напротив, всегда выполняются соотношения (2.2). $\square$

Из приведенной схемы доказательства кроме того следует, что при выбранном $x \in X$ для построения «эффективной» для этого x композиции $\phi_{|X|^+} \in \mathrm{ITER}_{|X|^+}[\mathbf{F}]$, $\phi = (f_\iota)_{\iota \in \mathbf{W}_+(|X|^+)}$, то есть такой, что $\phi_{|X|^+}(x) \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$, достаточно при выборе элементов $f_{\iota+1} \in \mathbf{F}$ (в случае регулярного $\iota + 1$) соблюдать правило (см. (2.6))

$$f_{\iota+1}(\phi_\iota(x)) \neq \phi_\iota(x), \tag{2.10}$$

пока это возможно. Если же для некоторого $\eta \in \mathbf{W}_+(|X|^+)$ при переборе всех $f \in \mathbf{F}$ очередной элемент $f_{\eta+1}$, удовлетворяющий условию (2.10) при $\iota = \eta$, не существует (в силу теоремы 2.1 такой ординал непременно встретится), то, по определению, мы построили общую неподвижную точку $\phi_\eta(x)$ семейства $\mathbf{F}$: $f(\phi_\eta(x)) = \phi_\eta(x)$ $\forall f \in \mathbf{F}$.

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ *— множество сужающих изотонных отображений на* $(\mathcal{P}(H), \subset)$. *Тогда*

$$\{\top_{\mathbf{Fix}(\mathbf{F})}\} = \mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \cap \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}](H). \tag{2.11}$$

Отметим, что тогда «эффективная» композиция отображений из $\mathbf{F}$ (см. (2.10)) «начинающаяся» в $H = \top_{\mathcal{P}(H)}$, непременно «приводит» нас во множество $\mathbf{Fix}(\mathbf{F})$ и, следовательно, к элементу $\top_{\mathbf{Fix}(\mathbf{F})}$ — наибольшей общей неподвижной точке этого семейства.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.2) в правой части (2.11) стоит непустое множество. Пусть $w \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \cap \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}](H)$. Тогда $w = \psi(H)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{ITER}_{|H|^+}[\mathbf{F}]$. Выберем произвольно $M \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$. Тогда имеем (см. (2.1)) равенство

$$M = \psi(M).$$

С учетом этого равенства, отношения $M \subset H$ и «наследственной» изотонности ψ имеем отношения

$$M = \psi(M) \subset \psi(H) = w.$$

Отсюда в силу произвольного выбора M и единственности наибольшего элемента ЧУМ заключаем, что $w = \top_{\mathbf{Fix}(\mathbf{F})}$. Значит, выполняется (2.11). $\square$

Для семейства отображений $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ всегда определено отображение $\mathfrak{F} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ (нижняя огибающая семейства $\mathbf{F}$), вида

$$\mathfrak{F}(M) = \bigcap_{f \in \mathbf{F}} f(M) \qquad M \in \mathcal{P}(H). \tag{2.12}$$

Пусть $f, f' \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Обозначим $f \vee f'$, $f \wedge f'$ отображения из $\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ вида $(f \vee f')(M) \triangleq f(M) \cap f'(M)$, $(f \wedge f')(M) \triangleq f(M) \cup f'(M)$ $\forall M \in \mathcal{P}(H)$. Для всякого

$X \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ обозначим $\mathfrak{mix}_X$ — п/м отображений из $\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ (включающее X), полученных из элементов множества X путем применения конечного числа операций $\vee$, $\wedge$ и композиции. Индукцией по количеству указанных операций проверяется, что $\mathfrak{mix}_{\bar{\mathbf{F}}} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}\big)$ и верно равенство

$$\mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) = \mathbf{Fix}(\mathfrak{mix}_{\bar{\mathbf{F}}}). \tag{2.13}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)})$ *— множество сужающих отображений на* $(\mathcal{P}(H), \subset)$ *и* $\mathfrak{F} \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ *имеет вид* (2.12). *Пусть* $\bar{\mathbf{F}} \in \mathcal{P}'(\mathbf{F})$ *выбрано так, что для любого* $M \in \mathcal{P}(H)$ *найдется* $\eta_M \in \mathfrak{mix}_{\bar{\mathbf{F}}}$, *для которого*

$$\eta_M(M) \subset \mathfrak{F}(M)). \tag{2.14}$$

Тогда $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) = \mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) = \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для обоснования проверим выполнение цепочки вложений: $\mathbf{Fix}(\mathbf{F}) \subset \mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) \subset \mathbf{Fix}(\mathfrak{F}) \subset \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$.

Первое вложение, очевидно, выполнено.

Докажем второе вложение. По теореме 2.1 $\mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) \neq \varnothing$, поэтому пусть $\bar{M} \in \mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}})$. Найдем в силу условия теоремы $\eta_{\bar{M}} \in \mathfrak{mix}_{\bar{\mathbf{F}}}$ такое, что $\eta_{\bar{M}}(\bar{M}) \subset \mathfrak{F}(\bar{M})$. Из последнего вложения с учетом выбора $\bar{M}$ и равенства $\bar{M} = \eta_{\bar{M}}(\bar{M})$ (см. (2.13)) получим $\bar{M} \subset \mathfrak{F}(\bar{M})$. Из сужаемости $\mathfrak{F}$ тогда имеем равенство $\bar{M} = \mathfrak{F}(\bar{M})$, а значит и включение $\bar{M} \in \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$. В силу произвольности $\bar{M}$ получаем искомое вложение $\mathbf{Fix}(\bar{\mathbf{F}}) \subset \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$.

Обратимся к третьему вложению. Если $\mathbf{Fix}(\mathfrak{F}) = \varnothing$, то вложение, очевидно, выполняется. Пусть теперь $\bar{M} \in \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$. Тогда по определению $\mathfrak{F}$ (см. (2.12)) имеем $\bar{M} = \mathfrak{F}(\bar{M}) \subset f(\bar{M})$ $\forall f \in \mathbf{F}$. Из сужаемости элементов $\mathbf{F}$ и последнего вложения получим $\bar{M} = f(\bar{M})$ $\forall f \in \mathbf{F}$, то есть $\bar{M} \in \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$. В силу произвольного выбора $\bar{M}$ вновь получим искомое вложение $\mathbf{Fix}(\mathfrak{F}) \subset \mathbf{Fix}(\mathbf{F})$. □

3. Постановка задачи удержания и основные результаты

В качестве пространства позиций выберем непустое множество пар $D \triangleq I \times X$, где $I \subset \mathbb{R}$ аналог временного интервала, а X соответствует фазовому пространству. Если $t \in I$, то $I^t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leq t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geq t\}$. Множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^I)$ рассматриваем как траектории системы. Пусть $Y \neq \varnothing$ и $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^I)$ есть множество помех. Зададим динамику системы отображением $\mathcal{S} : D \times \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C})$. Итак, если $(t,x) \in D$ и $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{S}((t,x),\omega)$ суть траектории из начальной позиции (t,x) при помехе ω.

Для всякой позиции $(t,x) \in D$ обозначим $\mathbb{M}_{(t,x)}$ множество *квазистратегий* (неупреждающих непустозначных отображений): $\mathbb{M}_{(t,x)} \triangleq \{\alpha \in \mathcal{P}(\mathbf{C})^{\Omega} \mid \forall \omega \in \Omega \ \big(\alpha(\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big) \in \mathcal{P}'\left(\big(\mathcal{S}((t,x),\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big)\right), \ \forall \omega, \omega' \in \Omega \forall \xi \in \mathbf{I}_t \ ((\omega \,|\, I_\xi) = (\omega' \,|\, I_\xi)) \Rightarrow \left(\big(\alpha(\omega) \,|\, I_\xi\big) = \big(\alpha(\omega') \,|\, I_\xi\big)\right)\}$. Элементы $\mathbb{M}_{(t,x)}$ это допустимые процедуры управления, отвечающие начальной позиции (t,x).

Пусть $\mathcal{N} \subset D$ — заданные фазовые ограничения. Будем считать, что *задача удержания в* $\mathcal{N}$ разрешима для начальной позиции (t,x), если существует квазистратегия $\alpha_0 \in \mathbb{M}_{(t,x)}$ такая, что для любых $\tau \in \mathbf{I}_t$, $s \in \alpha_0(\omega)$ и $\omega \in \Omega$ выполняется

$$(\tau, s(\tau)) \in \mathcal{N}. \tag{3.1}$$

Для $H \in \mathcal{P}(D)$, $(t,x) \in D$ и $\omega \in \Omega$ обозначим $\Pi(\omega \mid (t,x), H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}((t,x),\omega) \mid (\xi, s(\xi)) \in H\, \forall \xi \in \mathbf{I}_t\}$. Обозначим $\mathbf{A}_\omega$, $\mathbf{A}_\omega \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ *оператор поглощения при помехе* $\omega \in \Omega$: $\mathbf{A}_\omega(H) \triangleq \{(t,x) \in H \mid \Pi(\omega \mid (t,x), H) \neq \varnothing\}$, $H \in \mathcal{P}(D)$. Определим ОПП как нижнюю огибающую семейства $\mathfrak{A} \triangleq (\mathbf{A}_\omega)_{\omega\in\Omega}$: $\mathbf{A}(H) \triangleq \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A(H)\ \ \forall H \in \mathcal{P}(D)$.

Далее будем придерживаться соглашения: если $t \in I$, $h \in \mathbf{C}$, $h' \in \mathbf{C}$, $\omega \in \Omega$ и $\omega' \in \Omega$, то отображения $(h\Box h')_t \in X^I$ и $(\omega\Box\omega')^t \in Y^I$ (склейки движений h, h' и помех ω, ω') определяются соотношениями

$$((h\Box h')_t(\xi) \triangleq h(\xi)\ \forall \xi \in I_t)\&((h\Box h')_t(\zeta) \triangleq h'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\})$$

$$((\omega\Box\omega')^t(\xi) \triangleq \omega(\xi)\ \forall \xi \in I_t)\&((\omega\Box\omega')^t(\zeta) \triangleq \omega'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}).$$

Условие 3.1 (полугрупповое свойство). Для любых $(s,x) \in D$, $\omega \in \Omega$, $h \in \mathcal{S}((s,x),\omega)$ и $t \in \mathbf{I}_s$ выполняется $(h \,|\, \mathbf{I}_t) \in \big(\mathcal{S}((t,h(t)),\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big)$.

Условие 3.2 (допустимость склейки движений). Для любых $(s,z) \in D$, $t \in \mathbf{I}_s$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$, $h \in \mathcal{S}(z,\omega)$ и $\forall h' \in \mathcal{S}((t,h(t)),\omega')$ выполняется

$$((\omega \,|\, I_t) = (\omega' \,|\, I_t)) \Rightarrow ((h\Box h')_t \in \mathcal{S}(z,\omega')).$$

Условие 3.3 (допустимость склейки помех). Для любых $t \in I$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ выполняется $(\omega\Box\omega')^t \in \Omega$.

Известно [9, 10], что при выполнении условий 3.1–3.3 множество разрешимости в такой задаче удержания при достаточно общих условиях есть наибольшая неподвижная точка $\mathcal{M} \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ оператора $\mathbf{A}$. При этом, если начальная позиция (t_0,x_0) лежит в $\mathcal{M}$, то отображение $\Omega \ni \omega \mapsto \Pi(\omega \mid (t_0,x_0),\mathcal{M}) \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ есть элемент множества $\mathbb{M}_{(t_0,x_0)}$ и удерживает все движения во множестве $\mathcal{N}$. Иначе говоря, эта квазистратегия, разрешает задачу удержания (3.1).

Итак, ключевым элементом решения в задаче удержания (3.1) является наибольший элемент $\mathcal{M}$ множества $\mathbf{Fix}(\mathbf{A})$ в ЧУМ $(\mathcal{P}(D),\subset)$. Для построения $\mathcal{M} \triangleq \top_{\mathbf{Fix}(\mathbf{A})}$ применим теорему 2.1, следствие 2.1 и лемму 2.1 к отображению $\mathbf{A}$ и семейству $\mathfrak{A}$.

Это можно сделать, так как введенные отображения $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_\omega$, $\omega \in \Omega$ принадлежат $\mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ и удовлетворяют условиям перечисленных утверждений: а именно, они действуют в булеане, являются сужающими, изотонными и состоят в нужном отношении — $\mathbf{A}$ является нижней огибающей семейства $\mathfrak{A}$. Комбинируя эти утверждения, получим следующие результаты:

Теорема 3.1. *Для ординала $\sigma \preccurlyeq |\mathcal{N}|^+$ и σ-последовательности вида* (2.10) *$\phi = (\mathbf{A}_{\omega_\eta})_{\eta\preccurlyeq\sigma}$ в $\mathfrak{A}$ выполняется равенство $\phi_\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$.*

Следствие 3.1. *Пусть $\mathfrak{A}' \in \mathcal{P}'(\mathfrak{A})$ выбрано так, что любого $M \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ найдется $\psi \in \mathfrak{mix}_{\mathfrak{A}'}$, для которого*

$$\psi(M) \subset \mathbf{A}(M). \tag{3.2}$$

Тогда для ординала $\sigma = |\mathcal{N}|^+$ и σ-последовательность вида (2.10) *$\phi' = (\mathbf{A}_{\omega_\eta})_{\eta\preccurlyeq\sigma}$ в $\mathfrak{A}'$ выполняется равенство $\phi'_\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$.*

4. Пример

Положим $I \triangleq \mathbb{R}$, $X \triangleq \mathbb{R}$, $Y \triangleq [-1,1]$, $D \triangleq I \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Множество помех $\Omega \in \mathcal{P}(Y^I)$ определим как $L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap Y^I$ — множество измеримых по Лебегу, существенно ограниченных функций из Y^I.

Для начального состояния $(t,x) \in D$ и помехи $\omega \in \Omega$ динамику $\mathcal{S}((t,x),\omega)$ зададим функциями из $\mathbf{C} \triangleq C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ вида

$$\mathcal{S}((t,x),\omega) \triangleq \{h \in \mathbf{C} \mid h(\tau) = x + \int_t^\tau (\omega(s) + u(s))ds,\ \tau \in I, u \in L_1(I,[-1,1])\}, \quad \tau \in I.$$

Множество фазовых ограничений $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(D)$ определим как $\mathcal{N} \triangleq D \setminus \{(s,z) \in D \mid s = 0, |z| \le 1\}$ — все фазовое пространство D за исключением вертикального отрезка, помещенного в начало координат.

Заметим, что определенная таким образом управляемая динамическая система удовлетворяет условиям 3.1–3.3. Следовательно, для нахождения области разрешимости задачи (3.1) в классе квазистратегий достаточно построить наибольшую неподвижную точку соответствующего ОПП. Проведем это построение двумя способами: во-первых, воспользуемся следствием 3.1, подобрав подходящее семейство $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$; во-вторых, найдем наибольшую неподвижную точку ОПП $\mathbf{A}$ для этой системы.

Пусть $\{\omega_1, \omega_{-1}\}$ — п/м двух помех, тождественно равных 1 и -1. Рассмотрим соответствующее семейство операторов поглощения: $\mathfrak{A}' = \{\mathbf{A}_{\omega_1}, \mathbf{A}_{\omega_{-1}}\}$. Можно проверить, что в этой задаче выполняется условие (3.2) и применить следствие 3.1 . Но мы воспользуемся тем, что в этом случае сравнительно просто удается построить наибольшую неподвижную точку $\mathcal{M}'$ семейства $\mathfrak{A}'$. А тогда, учитывая соотношения $\top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{F})} = \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{A})} \subset \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{A}')}$, выполняющиеся независимо от условий (2.14), (3.2), достаточно проверить лишь вложение $\mathcal{M}' \subset \mathbf{A}(\mathcal{M}')$, дающее включение $\mathcal{M}' \in \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$.

Строя последовательность значений композиций отображений из $\mathfrak{A}'$ вида

$$\mathbf{A}_{\omega_1}(\mathcal{N}),\ \mathbf{A}_{\omega_1}(\mathbf{A}_{\omega_{-1}}(\mathcal{N})),\ \ldots\ ,\ \mathbf{A}_{\omega_1}(..(\mathbf{A}_{\omega_{-1^i}}(\mathcal{N}))..),\ \ldots \quad i \in \mathbb{N}$$

в точке $\mathcal{N}$, мы замечаем, что выполняется условие (2.10) «эффективной» для $\mathcal{N}$ последовательности — все значения различны. Значит (см. теорему 3.1 для случая $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$), эта последовательность сходится к наибольшей неподвижной точке из $\mathbf{Fix}(\mathfrak{A}')$. Так как (для обозримости приведем только четные индексы)

$$\mathbf{A}_{\omega_1}(..(\mathbf{A}_{\omega_{-1^i}}(\mathcal{N}))..) = D \setminus \{(s,z) \in D \mid s \le 0, |z| \le 1, z \ge -2(s+i-0.5)\}, \quad i = 2k,\ k \in \mathbb{N},$$

в качестве предела $\mathcal{M}' \triangleq \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{A}')}$ имеем $\mathcal{M}' = D \setminus \{(s,z) \in D \mid s \le 0, |z| \le 1\}$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{M}' \subset \mathbf{A}(\mathcal{M}')$. Поэтому в силу сужаемости $\mathfrak{F}$ выполнено $\mathcal{M}' \in \mathbf{Fix}(\mathfrak{F})$. Тогда имеем $\mathcal{M}' = \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{F})} \triangleq \mathcal{M}$.

С другой стороны, можно проверить, что $\mathbf{A}^k(\mathcal{N}) = D \setminus \{(s,z) \in D \mid s \in [-k,0], |z| \le 1\}$ для $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathbf{A}^\infty(\mathcal{N}) \triangleq \cap_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{A}^k(\mathcal{N}) = \mathcal{M}'$. Но согласно выводам метода программных итераций имеет место равенство $\mathbf{A}^\infty(\mathcal{N}) = \top_{\mathbf{Fix}(\mathfrak{F})} \triangleq \mathcal{M}$. Таким образом, два различных по форме представления наибольшей неподвижной точки ОПП приводят к одинаковому множеству разрешимости в рассматриваемой игре.

Так как выполняются условия 3.1–3.3, полученное множество разрешимости $\mathcal{M}'$ дает основу для построения разрешающей задачу квазистратегии вида $\Omega \ni \omega \mapsto \Pi(\omega \mid (t_0,x_0),\mathcal{M}') \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$.

References

[1] Р. Айзекс, *Дифференциальные игры*, Мир, М., 1967. [R. Isaacs, *Differential Games*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

[2] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin, *Positional Differential Games*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[3] А. Г. Ченцов, "Об игровой задаче сближения в заданный момент времени", *Матем. сб.*, **99(141)**:3 (1976), 394–420; англ. пер.:A. G. Chentsov, "On a game problem of converging at a given instant of time", *Math. USSR-Sb.*, **28**:3 (1976), 353–376.

[4] С. В. Чистяков, "К решению игровых задач преследования", *Прикладная математика и механика*, **41**:5 (1977), 825–832. [S. V. Chistyakov, "On solving game problems of pursuit", *Applied Mathematics and Mechanics*, **41**:5 (1977), 825–832 (In Russian)].

[5] В. И. Ухоботов, "Построение стабильного моста для одного класса линейных игр", *Прикладная математика и механика*, **41**:2 (1977), 358–364. [V. I. Ukhobotov, "Construction of a stable bridge for one class of linear games", *Applied Mathematics and Mechanics*, **41**:2 (1977), 358–364 (In Rusian)].

[6] Д. А. Серков, "К построению множества истинности предиката", *Изв. ИМИ УдГУ*, **50** (2017), 45–61. [D. A. Serkov, "On the construction of a predicate truth set", *Izv. IMI UdGU*, **50** (2017), 45–61 (In Russian)].

[7] А. Г. Ченцов, "Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания", *Автомат. и телемех.*, 2004, № 2, 157–169; англ. пер.:A. G. Chentsov, "An abstract confinement problem: a programmed iterations method of solution", *Autom. Remote Control*, **65**:2 (2004), 299–310.

[8] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Theory of Sets*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[9] Д. А. Серков, А. Г. Ченцов, "Реализация метода программных итераций в пакетах пространств", *Изв. ИМИ УдГУ*, 2016, № 2(48), 42–67. [D. A. Serkov, A. G. Chentsov, "Implementation of the programmed iterations method in packages of spaces", *Izv. IMI UdGU*, 2016, № 2(48), 42–67 (In Russian)].

[10] Д. А. Серков, "Трансфинитные последовательности в методе программных итераций", Тр. ИММ УрО РАН, **23**, 2017, 228–240; англ. пер.:D. A. Serkov, "Transfinite sequences in the method of programmed iterations", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **300**:, suppl. 1 (2018), 153–164.

Информация об авторе

Серков Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: serkov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0628-6217

Поступила в редакцию 25.06.2020
Поступила после рецензирования 10.08.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Dmitriy A. Serkov, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: serkov@imm.uran.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0628-6217

Received 25.06.2020
Reviewed 10.08.2020
Accepted for press 09.09.2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-299-306
УДК 517.929

К вопросу об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием

Пётр Михайлович СИМОНОВ
ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15

On the stability of a system of two linear hybrid functional differential systems with aftereffect

Pyotr M. SIMONOV
Perm State National Research University
15 Bukirev St., Perm 614990, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается система двух гибридных векторных уравнений, содержащих линейные разностную (определенную на дискретном множестве) и функционально-дифференциальную (определенную на полуоси) части. Для ее изучения выбирается модельная система двух векторных уравнений, одно из которых линейное разностное с последействием (ЛРУП), а другое – линейное функционально-дифференциальное с последействием (ЛФДУП). Показаны два равносильных представления этой системы: первое представление в виде ЛФДУП, второе – в виде ЛРУП. Это позволяет для исследования вопросов устойчивости рассматриваемой системы использовать известные результаты об устойчивости ЛФДУП и ЛРУП.

С использованием результатов [Гусаренко С. А. Об устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Краевые задачи. Межвузовский сборник научных трудов. Пермь: ППИ, 1989. С. 3–9], рассмотрены два примера исследования устойчивости по правой части совместных систем четырех уравнений. В первом примере используется ЛФДУП, для которого известны достаточные условия знакоопределенности элементов 2×2 матрицы-функции Коши (в терминах коэффициентов ЛФДУП). Во втором примере ЛФДУП есть система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) второго порядка. В обоих случаях, известны оценки компонент матрицы-функции Коши. Для компонент матрицы-функции Коши ЛРУП дана экспоненциальная оценка с отрицательным показателем.

Ключевые слова: гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений; линейное разностное уравнение с последействием; линейное функционально-дифференциальное уравнение с последействием; формула Коши; устойчивость по правой части; вольтерровая обратимость; оценка нормы оператора

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332_а).

Для цитирования: *Симонов П.М.* К вопросу об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 299–306.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-299-306.

Abstract. We consider a system of two hybrid vector equations containing linear difference (defined on a discrete set) and functional differential (defined on a half-axis) parts. To study it, a model system of two vector equations is chosen, one of which is linear difference with aftereffect (LDEA), and the other is a linear functional differential with aftereffect (LFDEA). Two equivalent representations of this system are shown: the first representation in the form of LFDEA, the second — in the form of LDEA. This allows us to study the stability issues of the system under consideration using the well-known results on the stability of LFDEA and LDEA.

Using the results of the article [Gusarenko S. A. On the stability of a system of two linear differential equations with delayed argument // Boundary value problems. Interuniversity collection of scientific papers. Perm: PPI, 1989. P. 3–9], two examples are shown when a joint system of four equations will be stable with respect to the right side. In the first example, we use the LFDEA for which sufficient conditions for the sign-definiteness of the elements of the 2×2 Cauchy matrix function are known (in terms of the LFDEA coefficients). In the second example, LFDEA is given such that LFDEA is a system of linear ordinary differential equations (LODE) of the second order. In both cases, estimates of the components of the Cauchy matrix function are known. An exponential estimate with a negative exponent is given for the components of the Cauchy matrix function of LDEA.

Keywords: hybrid linear system of functional differential equations; linear difference equation with aftereffect; linear functional differential equation with aftereffect; Cauchy formula; stability with respect to the right side, Volterra reversibility, evaluation of operator norm

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00332_a).

For citation: Simonov P.M. K voprosu ob ustoychivosti sistemy dvukh lineynykh gibridnykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem s posledeystviyem [On the stability of a system of two linear hybrid functional differential systems with aftereffect]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 299–306. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-299-306. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работах [1–3] исследованы вопросы устойчивости двух гибридных уравнений. В [1, 2] рассмотрено ЛОДУ первого порядка и разностное уравнение из двух слагаемых, установлены признаки устойчивости такого уравнения, использующие W-метод Н.В. Азбелева [4]. В [3] рассмотрено линейное функционально-дифференциальное с последействием (ЛФДУП) первого порядка с одним запаздыванием и разностное уравнение из двух слагаемых. Подход к исследованию устойчивости двух ЛФДУП с двумя запаздываниями и с двумя разностными уравнениями предложен в работе [5].

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $||\alpha||_{\mathbb{R}^n}$; L — пространство (классов эквивалентности) локально суммируемых функций $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||f||_{L[0,T]} = \int_0^T ||f(t)||_{\mathbb{R}^n}\, dt$ для всех $T > 0$; D — пространство локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с полунормами $||x||_{D[0,T]} = ||\dot{x}||_{L[0,T]} + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T > 0$; L_∞ — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ с нормой $||z||_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \geq 0} ||z(t)||_{\mathbb{R}^n}$.

Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots\}$ со столбцами $y(-1), y(0), y(1), \ldots, y(N), \ldots \in \mathbb{R}^n$ сопоставим вектор-функцию

$$y([t]) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

(где $[t]$ обозначена целая часть действительного числа t, а χ_E — характеристическая функция множества E). Символом $y[t]$ обозначим вектор-функцию $y([t])$, $t \in [-1, \infty)$. Множество таких вектор-функций $y[\cdot]$ является линейным пространством, обозначим его ℓ_0. Введем в линейном пространстве ℓ_0 полунормы $||y||_{\ell_{0T}} = \sum\limits_{i=-1}^{T} ||y_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq -1$.

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots\}$ со столбцами $g(0), g(1), \ldots, g(N), \ldots \in \mathbb{R}^n$ сопоставим вектор-функцию

$$g([t]) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + ... + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \ldots$$

Обозначим $g[t] = g([t])$, $t \in [0, \infty)$. Определим линейное пространство ℓ таких вектор-функций и введем в этом пространстве полунормы $||g||_{\ell_T} = \sum\limits_{i=0}^{T} ||g_i||_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T \geq 0$.

Обозначим $(\Delta y)(t) = y[t] - y[t-1]$ при $t \geq 1$ и $(\Delta y)(t) = y(0)$ при $t \in [0, 1)$.

Рассмотрим линейную гибридную функционально-дифференциальную систему с последействием (ЛГФДСП) вида

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \qquad \mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \tag{0.1}$$

Операторы $\mathcal{L}_{11}, F_{11} : D \to L$, $\mathcal{L}_{12}, F_{12} : \ell_0 \to L$, $\mathcal{L}_{21}, F_{21} : D \to \ell$, $\mathcal{L}_{22}, F_{22} : \ell_0 \to \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми, $f \in L$, $g \in \ell$.

Пусть модельное уравнений $\mathcal{L}_{11}x = z$ и банахово пространство $B \subset L$ (это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$, порождаемое модельным уравнением, будет состоять из решений, представимых формулой Коши

$$x(t) = (\mathcal{C}_{11}z)(t) + (\mathcal{X}_{11}\alpha)(t) = \int\limits_0^t C_{11}(t,s)z(s)\,ds + X_{11}(t)\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^n, \quad z \in B).$$

Здесь $\mathcal{C}_{11}$ — это оператор Коши, $C_{11}(t,s)$ — это матрица-функция Коши, $\mathcal{X}_{11}$ — оператор умножения на фундаментальную матрицу, $X_{11}(t)$ — фундаментальная матрица. Норму в $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ определим равенством $||x||_{D(\mathcal{L}_{11},B)} = ||\mathcal{L}_{11}x||_B + ||x(0)||_{\mathbb{R}^n}$.

Предположим, что оператор $\mathcal{C}_{11}$ непрерывно действует из пространства B в это же пространство B, а оператор $\mathcal{X}_{11}$ действует из $\mathbb{R}^n$ в B. Это условие эквивалентно тому, что пространство $D(\mathcal{L}_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_B^{(1)}[0,\infty)$ с обычной нормой $||x||_{W_B^{(1)}[0,\infty)} = ||\dot{x}||_B + ||x||_B$. В дальнейшем будем это пространство обозначать как W_B. При этом, $W_B \subset D$, и это вложение непрерывно. Будем также пользоваться обозначением $W_B^0 = \{x \in W_B : x(0) = 0\}$.

Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ с оператором $\mathcal{L}_{11} : W_B \to B$ называется W_B-устойчивым (см. [4]) тогда и только тогда, когда оно сильно B-устойчиво. Уравнение $\mathcal{L}_{11}x = z$ называется сильно B-устойчивым, если для любого $z \in B$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in B$ и $\dot{x} \in B$.

1. Сведение к ЛФДУП

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{22}y = g$ для $g \in \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши: $y[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]\,g[s]$.

Обозначим $(\mathcal{C}_{22}g)[t] = \sum\limits_{s=0}^{t} C_{22}[t,s]\,g[s]\,,\ (\mathcal{Y}_{22}y(-1))[t] = Y_{22}[t]\ y(-1)\,.$

Пусть $M \subset \ell$ и $M_0 \subset \ell_0$ — банаховы пространства, причем пространства M_0, M изоморфны. Определим также пространство $M_0^0 = \{y \in M_0 : y(-1) = 0\}$.

Каждое решение y второго уравнения в (0.1) имеет вид:

$$y = -\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + Y_{22}y(-1) + \mathcal{C}_{22}g.$$

Подставим его в первое уравнение системы (0.1), получим:

$$\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) + \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g = f,$$

$$\mathcal{L}_{11}x - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}x = f_1 = f - \mathcal{L}_{12}Y_{22}y(-1) - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}g.$$

Обозначим $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}$, тогда первое уравнение системы (0.1) примет вид $\mathcal{L}_1x = f_1$. Если вольтерров оператор $\mathcal{L}_1 : W_B^0 \to B$ вольтеррово обратим, то при любом $f_1 \in B$ решение уравнения $\mathcal{L}_1x = f_1$ принадлежит пространству W_B . Таким образом, получены условия, при которых система (0.1) обладает тем свойством, что при любом векторе $\{f, g\} \in B \times M$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times M_0$.

2. Сведение к ЛРУП

Для уравнения (0.1) будем пользоваться принятыми в пункте 1 обозначениями.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{L}_{11}x = f$ для $f \in B$ (где B непрерывно вложено в L) принадлежит пространству W_B и представляется формулой Коши

$$x = X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11}f.$$

Из первого уравнения в (0.1) найдем

$$x = -\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + X_{11}x(0) + \mathcal{C}_{11}f.$$

Подставим x во второе уравнение системы (0.1):

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = -\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) + \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f + \mathcal{L}_{22}y = g,\\ -\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}y + \mathcal{L}_{22}y = g_1 = g - \mathcal{L}_{21}X_{11}x(0) - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}f.\end{gathered}$$

Обозначив $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12},$ запишем второе уравнение системы (0.1) следующим образом $\mathcal{L}_2y = g_1$. Если вольтерров оператор $\mathcal{L}_2 : M_0^0 \to M$ вольтеррово обратим, то при любом $g_1 \in M$ решение y уравнения $\mathcal{L}_2y = g_1$ принадлежит пространству M_0. Таким образом, здесь также получены условия, при которых система (0.1) обладает тем свойством, что при любом $\{f, g\} \in B \times M$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times M_0$.

3. Достаточное условие устойчивости

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим систему двух автономных ЛФДУП и ЛРУП следующего вида.

Пусть линейные операторы определены равенствами:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{11}\{x_1,x_2\}_1 &= \dot x_1 + a_{11}x_{1\tau_{11}} + a_{12}x_{2\tau_{12}}, & \mathcal{L}_{12}\{y_1,y_2\}_1 &= b_{11}y_{1\delta_{11}} + b_{12}y_{2\delta_{12}},\\
\mathcal{L}_{11}\{x_1,x_2\}_2 &= \dot x_2 + a_{21}x_{1\tau_{21}} + a_{22}x_{2\tau_{22}}, & \mathcal{L}_{12}\{y_1,y_2\}_2 &= b_{21}y_{1\delta_{21}} + b_{22}y_{2\delta_{22}},\\
\mathcal{L}_{21}\{x_1,x_2\}_1 &= c_{11}x_{1\rho_{11}} + c_{12}x_{2\rho_{12}}, & \mathcal{L}_{22}\{y_1,y_2\}_1 &= y_1 - d_{11}y_{1\theta_{11}} - d_{12}y_{2\theta_{12}}\\
\mathcal{L}_{21}\{x_1,x_2\}_2 &= c_{21}x_{1\rho_{21}} + c_{22}x_{2\rho_{22}}, & \mathcal{L}_{22}\{y_1,y_2\}_2 &= y_2 - d_{21}y_{1\theta_{21}} - d_{22}y_{2\theta_{22}}.
\end{aligned}$$

Здесь $x_{1\tau}(t) = x_1(t-\tau)$, если $t \ge \tau$, $x_{1\tau}(t) = 0$, если $t < \tau$, и аналогичные определения верны для остальных суперпозиций.

Обозначим:

$$\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 :\ ||y||_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=-1,0,1,\cdots} |y(k)| < +\infty\},$$
$$\ell_{\infty} = \{g \in \ell :\ ||g||_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0,1,\cdots} |g(k)| < +\infty\}.$$

Получим условия, при которых для любых $\{f,g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ решения $\{x,y\}$ рассматриваемой здесь системы принадлежат пространству $W_B \times \ell_{\infty 0}$. Для этого надо найти условия вольтерровой обратимости оператора $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21} : W^0_{L_\infty} \to L_\infty$, или условия вольтерровой обратимости оператора $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12} : \ell^0_{\infty 0} \to \ell_\infty$. Здесь

$$\mathcal{C}_{22} = (\mathcal{I} - \mathcal{S})^{-1}, \quad \mathcal{S}\{y_1,y_2\} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}\{y_1,y_2\}_1 \\ \mathcal{S}\{y_1,y_2\}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}y_{1\theta_{11}} + d_{12}y_{2\theta_{12}} \\ d_{21}y_{1\theta_{21}} + d_{22}y_{2\theta_{22}} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $||\mathcal{S}||_{\ell_\infty \to \ell_{\infty 0}} \le \left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2} < 1$. Тогда для для оценки нормы оператора $||\mathcal{C}_{22}||_{\ell_\infty \to \ell^0_{\infty 0}}$ достаточно положить

$$||\mathcal{C}_{22}||_{\ell_\infty \to \ell^0_{\infty 0}} = ||(\mathcal{I} - \mathcal{S})^{-1}||_{\ell_\infty \to \ell^0_{\infty 0}} \le \frac{1}{1 - ||\mathcal{S}||_{\ell_\infty \to \ell_{\infty 0}}} \le \frac{1}{1 - \left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}.$$

Для исследования вольтерровой обратимости операторов $\mathcal{L}_1 : W^0_{L_\infty} \to L_\infty$ и $\mathcal{L}_2 : \ell^0_{\infty 0} \to \ell_\infty$ достаточно оценить $||\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}||_{W^0_{L_\infty} \to W^0_{L_\infty}}$ или $||\mathcal{C}_{22}\mathcal{L}_{21}\mathcal{C}_{11}\mathcal{L}_{12}||_{\ell^0_{\infty 0} \to \ell^0_{\infty 0}}$.

Имеем:

$$||\mathcal{C}_{11}||_{L_\infty \to W^0_{L_\infty}} \le \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}, \quad ||\mathcal{L}_{21}||_{W^0_{L_\infty} \to \ell_\infty} \le \left\| \begin{matrix} |c_{11}| & |c_{12}| \\ |c_{21}| & |c_{22}| \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2},$$

$$||\mathcal{L}_{12}||_{\ell^0_{\infty 0} \to L_\infty} \le \left\| \begin{matrix} |b_{11}| & |b_{12}| \\ |b_{21}| & |b_{22}| \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}, \quad ||\mathcal{C}_{22}||_{\ell_\infty \to \ell^0_{\infty 0}} \le \frac{1}{1 - \left\| \begin{matrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{matrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}}.$$

Обозначили $\sigma_{ij}=\sup\limits_{t\geq 0}\int\limits_0^t |C_{11ij}(t,s)|\,ds<\infty,\ \ i,j=1,2$. При любых $\{f,g\}\in L_\infty\times\ell_\infty$ решения $\{x,y\}$ рассматриваемой системы принадлежат пространству $W_B\times\ell_{\infty 0}$, если выполнено неравенство

$$\left\|\begin{array}{cc}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{array}\right\|_{\mathbb{R}^2}\times\left\|\begin{array}{cc}|b_{11}| & |b_{12}|\\ |b_{21}| & |b_{22}|\end{array}\right\|_{\mathbb{R}^2}\times\left\|\begin{array}{cc}|c_{11}| & |c_{12}|\\ |c_{21}| & |c_{22}|\end{array}\right\|_{\mathbb{R}^2}\times\frac{1}{1-\left\|\begin{array}{cc}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{array}\right\|_{\mathbb{R}^2}}<1,$$

или неравенство

$$\left\|\begin{array}{cc}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{array}\right\|_{\mathbb{R}^2}\times\left\|\begin{array}{cc}|b_{11}| & |b_{12}|\\ |b_{21}| & |b_{22}|\end{array}\right\|_{\mathbb{R}^2}\times\left\|\begin{array}{cc}|c_{11}| & |c_{12}|\\ |c_{21}| & |c_{22}|\end{array}\right\|_{\mathbb{R}^2}<1-\left\|\begin{array}{cc}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\end{array}\right\|_{\mathbb{R}^2}. \tag{3.2}$$

Как показано в [6], если $a_{11}>0$, $a_{22}>0$, $\tau_{11}\leq 1/(ea_{11})$, $\tau_{22}\leq 1/(ea_{22})$, $a_{12}a_{21}\geq 0$, $d=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0,$ то

$$\Sigma:=\left(\begin{array}{cc}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\frac{a_{22}}{d} & \frac{|a_{12}|}{d}\\ \frac{|a_{21}|}{d} & \frac{a_{11}}{d}\end{array}\right).$$

Итак, при выполнении перечисленных условий на коэффициенты уравнений и запаздывания, в случае $a_{12}<0$, $a_{21}<0$, рассматриваемая система обладает свойством

$$\Sigma=\left(\begin{array}{cc}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{array}\right)^{-1}.$$

П р и м е р 3.2. Рассмотрим систему двух таких же автономных ЛФДУП и ЛРУП. Но в этом примере предположим, что ЛФДУП есть система ЛОДУ, то есть запаздывания отсутствуют: $\tau_{11}=\tau_{12}=\tau_{21}=\tau_{22}=0$. Пусть

$$a_{11}+a_{22}>0,\ \ d=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}>0,\ \ D=(a_{11}-a_{22})^2/4+a_{12}a_{21}>0,\ \ \lambda=\sqrt{|D|}.$$

Тогда, как показано в работе [6], для системы ЛОДУ при $i\neq j$ справедливы следующие равенства:

$$\sigma_{ii}=a_{jj}/d,$$

если $a_{ij}a_{ji}\geq 0$ или $D\geq 0$, $a_{ij}a_{ji}<0$, $a_{ii}\leq a_{jj}$;

$$\sigma_{ii}=\big[a_{jj}+2\sqrt{-a_{ij}a_{ji}}\big((a_{ii}-a_{jj}-2\lambda)/(a_{ii}-a_{jj}+2\lambda)\big)^{\frac{a_{ii}+a_{jj}}{4\lambda}}\big]/d,$$

если $D\geq 0$, $a_{ij}a_{ji}<0$, $a_{ii}>a_{jj}$;

$$\sigma_{ii}=\big(a_{jj}+2\sqrt{-a_{ij}a_{ji}}\,e^{-\frac{a_{ii}+a_{jj}}{a_{ii}-a_{jj}}}\big)/d,$$

если $D=0$, $a_{ij}a_{ji}<0$, $a_{ii}>a_{jj}$;

$$\sigma_{ii}=\big(a_{jj}+2\sqrt{-a_{ij}a_{ji}}\,e^{-\frac{a_{ii}+a_{jj}}{2\lambda}\arctan\frac{2\lambda}{a_{ii}-a_{jj}}}/\big(1-e^{-\pi\frac{a_{ii}+a_{jj}}{2\lambda}}\big)\big)/d,$$

если $D < 0$, $a_{ij}a_{ji} < 0$, $a_{ii} > a_{jj}$;

$$\sigma_{ii} = \big(a_{jj} + 2\sqrt{-a_{ij}a_{ji}}\, e^{\frac{a_{ii}+a_{jj}}{2\lambda}(\arctan\frac{2\lambda}{a_{jj}-a_{ii}}-\pi)}/(1 - e^{-\pi\frac{a_{ii}+a_{jj}}{2\lambda}})\big)/d,$$

если $D < 0$, $a_{ij}a_{ji} < 0$, $a_{ii} < a_{jj}$;

$$\sigma_{ij} = |a_{ij}|/d,$$

если $D \geq 0$;

$$\sigma_{ij} = |a_{ij}| \operatorname{cth} \frac{\pi(a_{ii} + a_{jj})}{4\lambda}/d,$$

если $D < 0$.

Таким образом, в данной ситуации имеет место неравенство (3.2), гибридная система устойчива, то есть при любых $\{f, g\} \in L_\infty \times \ell_\infty$ для ее решения выполнено включение $\{x, y\} \in W_B \times \ell_{\infty 0}$.

References

[1] А. С. Ларионов, П. М. Симонов, "Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II", *Вестник РАЕН. Темат. номер "Дифференциальные уравнения"*, **14**:5 (2014), 38–45. [A. S. Larionov, P. M. Simonov, "Stability of hybrid functional differential systems with aftereffect (HFDSA). II", *Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Special Issue "Differential Equations"*, **14**:5 (2014), 38–45 (In Russian)].

[2] Д. Л. Андрианов, В. О. Арбузов, С. В. Ивлиев, В. П. Максимов, П. М. Симонов П.М., "Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация", *Вестник Пермского университета. Серия: "Экономика"*, **27**:4 (2015), 8–32. [D. L. Andrianov, V. O. Arbuzov, S. V. Ivliev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, "Dynamic models of economics: theory, applications, software implementation", *Perm University Herald. Economy*, **27**:4 (2015), 8–32 (In Russian)].

[3] П. М. Симонов, "Об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **46**:2 (2015), 184–192. [P. M. Simonov, "On the stability of linear hybrid functional differential systems", *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of Udmurt State University*, **46**:2 (2015), 184–192 (In Russian)].

[4] Н. В. Азбелев, Л. М. Березанский, П. М. Симонов, А. В. Чистяков, "Устойчивость линейных систем с последействием. IV", *Дифференциальные уравнения*, **29**:2 (1993), 196–204; англ. пер.:N. V. Azbelev, L. M. Berezanskii, P. M. Simonov, A. V. Chistyakov, "Stability of linear systems with aftereffect. IV", *Differential Equations*, **2**:5 (1993), 153–160.

[5] П. М. Симонов, "Об устойчивости системы двух линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП)", *Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2020*, Материалы Международной конференции (Воронеж, 26–30 января 2020 г.), ИПЦ «Научная книга», Воронеж, 2020, 256–263. [P. M. Simonov, "On the stability of a system of two linear hybrid functional differential systems with aftereffect (LHFDSA)", *Voronezh Winter Mathematical School S.G. Krein – 2020*, Materials of the International Conference (Voronezh, January 26–30, 2020), Publishing and Printing Center "Scientific Book", Voronezh, 2020, 256–263 (In Russian)].

[6] С. А. Гусаренко, "Об устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом", *Краевые задачи. Межвузовский сборник научных трудов*, 1989, 3–9. [S. A. Gusarenko, "On the stability of a system of two linear differential equations with delayed argument", *Boundary Value Problems. Interuniversity Collection of Scientific Papers*, 1989, 3–9 (In Russian)].

Информация об авторе

Симонов Пётр Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике. Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация. E-mail: simpm@mail.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6357-662X

Поступила в редакцию 05.05.2020
Поступила после рецензирования 30.06.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Information about the author

Pyotr M. Simonov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics. Perm State National Research University, Perm, Russian Federation. E-mail: simpm@mail.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6357-662X

Received 05.05.2020
Reviewed 30.06.2020
Accepted for press 09.09.2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-307-330

УДК 519.85

Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа

Михаил Иосифович СУМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis

Mikhail I. SUMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Nizhnii Novgorod State University

23 Gagarin Ave., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation

Аннотация. Статья посвящена получению теорем Куна–Таккера в недифференциальной форме в задачах на условный экстремум в гильбертовом пространстве. Ограничения задач задаются операторами, образы которых также вкладываются в гильбертово пространство. Эти ограничения содержат аддитивно входящие в них параметры. В основе получения недифференциальных теорем Куна–Таккера лежит так называемый метод возмущений. Статья состоит из двух основных разделов. Первый из них посвящен получению недифференциального принципа Лагранжа в том случае, когда задача на условный экстремум является выпуклой. Теорема Куна–Таккера есть «регулярная часть» этого принципа Лагранжа. Здесь приводятся также различные утверждения, связывающие множители Лагранжа со свойствами субдифференцируемости выпуклой функций значений задачи. Основное предназначение первого раздела состоит в том, чтобы проследить, как классическая конструкция функции Лагранжа в ее регулярном и нерегулярном вариантах «порождается» субдифференциалами и асимптотическими субдифференциалами функции значений. Данное обстоятельство и результаты первого раздела позволяют перекинуть естественный мостик от выпуклых параметрических задач на условный экстремум к аналогичным нелинейным параметрическим задачам второго основного раздела, в которых функция значений, вообще говоря, не является выпуклой. Центральную роль здесь играют уже не субдифференциалы в смысле выпуклого анализа, а субдифференциалы негладкого (нелинейного) анализа. Как следствие, в этом случае в качестве основной конструкции выступает так называемая модифицированная (не классическая) функция Лагранжа. Ее конструкция полностью зависит от того, как понимается субдифференцируемость в смысле негладкого (нелинейного) анализа.

Ключевые слова: задача на условный экстремум; недифференциальная теорема Куна–Таккера; метод возмущений; функция значений; выпуклый анализ; негладкий (нелинейный) анализ; субдифференциалы

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 19-07-00782_а, № 20-01-00199_а, № 20-52-00030 Бел_а).

Для цитирования: *Сумин М.И.* Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 307–330. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-307-330.

Abstract. The paper is devoted to obtaining Kuhn-Tucker theorems in nondifferential form in constrained extremum problems in a Hilbert space. The constraints of the problems are specified by operators whose images are also embedded in a Hilbert space. These constraints contain parameters that are additively included in them. The basis for obtaining nondifferential Kuhn-Tucker theorems is the so-called perturbation method. The article consists of two main sections. The first of them is devoted to obtaining the nondifferential Lagrange principle in the case when the constrained extremum problem is convex. In this case, the Kuhn-Tucker theorem is its “regular part”. Various statements are also presented here that relate the Lagrange multipliers to the subdifferentiability properties of the convex value function of the problem. The main purpose of the first section is to trace how the classical construction of the Lagrange function in its regular and nonregular forms is “generated” by subdifferentials and asymptotic subdifferentials of the value function. This circumstance and the results of the first section make it possible to transfer the natural bridge from the convex parametric constrained extremum problems to similar nonlinear parametric problems of the second section in which the value function, generally speaking, is not convex. The central role here is played not by subdifferentials in the sense of convex analysis, but by subdifferentials of nonsmooth (nonlinear) analysis. As a result, in this case, the so-called modified (not classical) Lagrange function acts as the main construction. Its construction depends entirely on how subdifferentiability is understood in the sense of nonsmooth (nonlinear) analysis.

Keywords: constrained extremum problem; nondifferential Kuhn-Tucker theorem; perturbation method; value function; convex analysis; nonsmooth (nonlinear) analysis; subdifferentials

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-07-00782_a, no. 20-01-00199_a, no. 20-52-00030 Bel_a).

For citation: Sumin M.I. Nedifferentsial'nyye teoremy Kuna–Takkera v zadachakh na uslovnyy ekstremum i subdifferentsialy negladkogo analiza [Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 307–330. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-307-330. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Статья посвящена получению теорем Куна–Таккера в недифференциальной форме в задачах на условный экстремум в гильбертовом пространстве с ограничениями, задаваемыми операторами, образы которых также вкладываются в гильбертово пространство. В основе получения указанных недифференциальных теорем Куна–Таккера лежит так называемый метод возмущений (см., например, [1, п. 3.3.2]), который является классическим подходом к исследованию задач на условный экстремум. Он позволяет изучать взаимосвязь субдифференциального свойств функций значений (S -функций) с условиями оптимальности, множителями Лагранжа, двойственностью в выпуклых задачах на условный экстремум в банаховых пространствах [1, п. 3.3.2], свойств устойчивости, чувствительности нелинейных конечномерных задач при возмущении их параметров [2, 3].

В данной статье рассматривается зависящая от аддитивно входящих в ограничения параметров классическая нелинейная (параметрическая) задача на условный экстремум с операторным ограничением типа равенства и конечным числом функциональных ограничений типа неравенства (ее «выпуклый» вариант см. в [1, п. 3.3.2])

$$(P_{p.r}) \qquad f(z) \to \inf, \;\; g(z) = p, \;\; h(z) \le r, \;\; z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $p \in H$, $r \in \mathbb{R}^m$ — параметры $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — непрерывный функционал, $g : \mathcal{D} \to H$ — непрерывный оператор, $h \equiv (h_1, \ldots, h_m) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ — непрерывный векторный функционал, $\mathcal{D} \subset Z$ — замкнутое множество, Z, H – гильбертовы пространства. Обозначим:

$$\mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \, \|g(z) - p\| \le \epsilon, \; \min_{x \in \mathbb{R}^m_-} |h(z) - r - x| \le \epsilon\}, \; \epsilon \ge 0, \;\; \mathbb{R}^m_- \equiv \{x \in \mathbb{R}^m : \, x \le 0\}.$$

Определим классическую нижнюю грань (классическое значение) задачи ($P_{p,r}$) формулой $\beta_0(p,r) \equiv \inf\limits_{z \in \mathcal{D}^0} f(z)$, а также ее обобщенную нижнюю грань (обобщенное значение) $\beta(p,r)$:

$$\beta(p,r) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon(p,r), \quad \beta_\epsilon(p,r) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r}} f(z), \qquad \beta_\epsilon(p,r) \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r} = \emptyset.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p,r) \le \beta_0(p,r)$, однако, как в выпуклых задачах ($P_{p,r}$) (f, h_i, $i = 1, \ldots, m$ — выпуклые функции, $g : Z \to H$ — линейный (аффинный) ограниченный оператор, $\mathcal{D}$ — выпуклое множество), так и в нелинейных (невыпуклых) возможно строгое неравенство $\beta(p,r) < \beta_0(p,r)$. Каждая из этих двух естественным образом возникающих функций значений в задаче ($P_{p,r}$) обладает своими характерными особенностями. Классическая функция значений $\beta_0 : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ для выпуклой задачи ($P_{p,r}$) является выпуклой [1, п. 3.3.2, следствие 1] (см. также лемму 1.1), но не обязана, вообще говоря, быть полунепрерывной снизу (см. примеры в разделе 1.1). В свою очередь, обобщенная функция значений $\beta : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ для задачи ($P_{p,r}$) общего (нелинейного) вида всегда является полунепрерывной снизу (см. лемму 2.4), но, естественно, не обязана в этом общем случае быть выпуклой.

С одной стороны, мы имеем дело в статье с получением для задачи ($P_{p,r}$) условий классической оптимальности в форме недифференциальных теорем Куна–Таккера и, стало быть, должны работать с классической функцией значений β_0. С другой же стороны, желая при этом непосредственно связать такие классические условия оптимальности с субдифференциальными свойствами функций значений, мы «неизбежно» должны иметь дело с полунепрерывными снизу функциями значений, так как именно для таких функций, задаваемых на гильбертовом пространстве (впрочем, как на многих других бесконечномерных пространствах), справедливы так называемые теоремы плотности субдифференцируемости как в смысле выпуклого анализа (в случае выпуклых функций) (см. лемму 1.5 и [4, теорема 4.3]), так и в смысле анализа нелинейного (в случае нелинейных невыпуклых функций) [5–8] (см. замечание 2.3). Последнее обстоятельство говорит в пользу необходимости, одновременно с функцией β_0, иметь дело и с обобщенной функцией значений β, которая и обладает соответствующими свойствами субдифференцируемости. В данной статье мы будем получать недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах ($P_{p,r}$), для которых имеет место равенство

$\beta(p,r) = \beta_0(p,r)$. Таким образом мы одновременно сможем использовать как свойство выпуклости функции значений (в выпуклой задаче), так и свойства ее плотной субдифференцируемости (в выпуклой и невыпуклой задачах).

Статья состоит из двух основных разделов. Первый из них посвящен получению недифференциальной теоремы Куна–Таккера, а, точнее говоря, недифференциального принципа Лагранжа (теорема Куна–Таккера есть его первая, «регулярная», часть), в выпуклой задаче $(P_{p,r}) \equiv (P^{co}_{p,r})$. Анализ приводимого здесь доказательства принципа Лагранжа (см. теорему 1.1) для задачи $(P^{co}_{p,r})$ говорит о том, что в своей основе он прежде всего опирается на факт существования нормали к надграфику выпуклой функции значений в данной точке (p,r) или, другими словами, на свойство ее субдифференцируемости в этой точке (непустота субдифференциала или наличие ненулевого элемента в асимптотическом субдифференциале). Таким образом, принцип Лагранжа в случае выпуклой задачи является следствием существования нормали в смысле выпуклого анализа к надграфику функции значений, как функции параметра, при данном фиксированном значении параметра. При этом «регулярная» часть принципа Лагранжа — теорема Куна–Таккера является следствием непустоты субдифференциала функции значений при данном фиксированном значении параметра. Данное наблюдение и содержание первого раздела имеют существенное методологическое значение и позволяют перекинуть естественный мостик от выпуклых параметрических задач на условный экстремум к аналогичным нелинейным параметрическим задачам. В них функция значений естественно «не обязана быть» выпуклой, и центральную роль в нелинейном случае играют уже нормали в смысле негладкого (нелинейного) анализа к надграфикам функций значений и, соответственно, субдифференциалы негладкого анализа (см., например, [5–8]). Получению соответствующих теорем Куна–Таккера для нелинейных (невыпуклых) задач $(P_{p,r})$ посвящен второй основной раздел статьи. В нем показывается как субдифференцируемость в смысле нелинейного анализа функции значений обеспечивает получение соответствующей теоремы Куна–Таккера в задаче $(P_{p,r})$. Однако, в этом случае в качестве основной конструкции будет выступать уже не классическая функция Лагранжа, а так называемая модифицированная, вид которой напрямую зависит от вида субдифференцируемости в смысле нелинейного анализа. В качестве понятий субдифференцируемости в общем нелинейном случае мы рассматриваем во втором разделе два широко используемых в нелинейном (негладком) анализе понятия — понятие проксимального субградиента и понятие судбдифференциала Фреше [5–8] (оба этих понятия определяются в разделе 2). Подчеркнем, что получение недифференциальных теорем Куна–Таккера как в выпуклом (раздел 1), так и невыпуклом (раздел 2) случаях на основе идеологии метода возмущений и наличие соответствующих результатов по плотности субдифференцируемости полунепрерывных снизу функций (как выпуклых, так и невыпуклых) обеспечивает, если так можно выразиться, дополнительную «легитимность» результатов статьи. Свойство плотности субдифференцируемости, в первую очередь, говорит о том, что выполнимость получаемых в статье недифференциальных теорем Куна–Таккера можно трактовать как характерное свойство выпуклых и невыпуклых задач на условный экстремум (в некоторых содержательных частных случаях оно является и свойством общего положения). Одновременно, можно утверждать, что аппарат современного негладкого анализа [5–8], подобно тому, как это сделано в выпуклом случае задачи $(P_{p,r}) \equiv (P^{co}_{p,r})$ (разделы 1.3 – 1.5), позволяет также установить тесную связь между регулярными и нерегулярными формами «нелинейных» условий оптимальности, между «нелинейными» субдифференциалами и множителями Лагранжа, однако эти вопросы в данной статье не рассматриваются. Недифференциальные теоремы Куна–Таккера имеют важное значение при изучении вопросов регуляризации классических условий оптимальности в различных задачах условной оптимизации (см., например, [9–13]).

1. Принцип Лагранжа и теорема Куна–Таккера в недифференциальной форме в выпуклой задаче на условный экстремум

В данном разделе последовательно ставится выпуклая задача на условный экстремум, доказываются соответствующие недифференциальные принцип Лагранжа и его «регулярная» часть — теорема Куна–Таккера, устанавливается связь между субдифференциалами функции значений и множителями Лагранжа, а также между «нерегулярной» и «регулярной» частями принципа Лагранжа.

1.1. Постановка выпуклой задачи на условный экстремум. Рассматриваем зависящую от параметров в ограничениях каноническую задачу на условный экстремум (см., например, [1, п. 3.3.2])

$$(P^{co}_{p,r}) \qquad f(z) \to \inf,\ \ Az = h + p,\ \ g(z) \equiv (g_1(z), \dots, g_m(z)) \le r,\ \ z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $p \in H$, $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m$ — параметры, $f, g_i : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, m$, — выпуклые непрерывные функционалы, $A : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, $h \in H$ — заданный элемент, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Решения задачи $(P^{co}_{p,r})$ в случае их существования будем обозначать через $z^0_{p,r}$, а всю совокупность таких решений — через $Z^0_{p,r} \equiv \{z^* \in \mathcal{D} : f(z^*) = \min\limits_{z \in \mathcal{D}^0_{p,r}} f(z)\}$. Здесь и ниже используется обозначение: $\mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|Az - h - p\| \le \epsilon,\ g_i(z) \le r_i + \epsilon,\ i = 1, \dots, m\}$.

Определим классическую функцию значений (зависящую от параметров (p, r) классическую нижнюю грань) задачи ($P^{co}_{p,r}$) формулой $\beta_0(p, r) = \inf\limits_{z \in \mathcal{D}^0_{p,r}} f(z)\ \forall\, (p, r) \in H \times \mathbb{R}^m$. Справедлива (см. [1, п. 3.3.2])

Лемма 1.1. *Функция значений* $\beta_0 : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ *является выпуклой.*

Помимо классической функции значений нам потребуется еще и обобщенная $\beta : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$, определяемая посредством соотношений

$$\beta(p, r) \equiv \beta_{+0}(p, r) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon(p, r), \quad \beta_\epsilon(p, r) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r}} f(z), \qquad \beta_\epsilon(p, r) \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r} = \emptyset.$$

Лемма 1.2. *Функция значений* $\beta : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{\pm\infty\}$ *является полунепрерывной снизу и выпуклой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства полунепрерывности снизу зададимся произвольной последовательностью $(p^i, r^i) \in H \times \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots$, $(p^i, r^i) \to (p, r) \in H \times \mathbb{R}^m$, $i \to \infty$. Согласно определению функции значений $\beta(p^i, r^i) = \lim\limits_{k \to \infty} \beta_{\epsilon_k}(p^i, r^i)$,

$\epsilon_k > 0$, $\epsilon_k \to 0$, $k \to \infty$, причем без ограничения общности считаем, что $\beta(p^i, r^i) \to \overline{\beta}(p, r)$, где $\overline{\beta}(p, r)$ некоторое число (конечное или $\pm\infty$). Пусть k_i, $i = 1, 2, \dots$, такая подпоследовательность последовательности $k = 1, 2, \dots$, что последовательность $\beta_{\epsilon_{k_i}}(p^i, r^i)$, $i = 1, 2, \dots$, имеет предел и к тому же $\lim\limits_{i\to\infty} \beta_{\epsilon_{k_i}}(p^i, r^i) = \overline{\beta}(p, r)$, $\epsilon_{k_i} > 0$, $\epsilon_{k_i} \to 0$, $i \to \infty$. Но тогда при всех $i = 1, 2, \dots$ имеем включение $\mathcal{D}^{\epsilon_{k_i}}_{p^i, r^i} \subset \mathcal{D}^{\bar{\epsilon}_i}_{p,r}$ для некоторой последовательности $\bar{\epsilon}_i$, $i = 1, 2, \dots$, $\bar{\epsilon}_i > 0$, $\bar{\epsilon}_i \to 0$, $i \to \infty$, и, значит, $\beta_{\epsilon_{k_i}}(p^i, r^i) \geq \beta_{\bar{\epsilon}_i}(p, r)$, $i = 1, 2, \dots$, откуда следует $\beta(p, r) = \lim\limits_{i\to\infty} \beta_{\bar{\epsilon}_i}(p, r) \leq \overline{\beta}(p, r)$. Последнее неравенство означает, что полунепрерывность снизу доказана. Выпуклость функции β есть следствие ее определения как поточечного предела выпуклых классических функций значений β_ϵ в выпуклых задачах $f(z) \to \inf$, $z \in \mathcal{D}^\epsilon_{p,r}$. Доказательство выпуклости $\beta_\epsilon : H \times R^m \to R^1 \cup \{\pm\infty\}$ проводится точно по схеме доказательства следствия 1 в [1, п. 3.3.2, с. 265]. В нем аффинное по (z, p) равенство $Az - h - p = 0$ заменяется на ограничение-неравенство $\|Az - h - p\| \leq \epsilon$ с выпуклой по (z, p) функцией $\|Az - h - p\|$, $(z, p) \in \mathcal{D} \times H$, схема же рассуждений полностью сохраняется.

Очевидно, что имеет место неравенство $\beta(p, r) \leq \beta_0(p, r)$ $\forall\,(p, r) \in H \times \mathbb{R}^m$, которое может выполняться в выпуклой задаче и как строгое. Приведем иллюстрирующие это обстоятельство примеры.

Пример 1.1. В качестве первого примера рассмотрим параметрическую задачу $e^{-x} \to \inf$, $e^{-x} \leq r$, $x, r \in \mathbb{R}^1$. Легко заметить, что в этом примере $\beta(0) = 0$, но $\beta_0(0) = +\infty$. При этом одновременно в этом примере функция β_0 не является полунепрерывной снизу. Второй аналогичный пример со строгим неравенством двух граней, но с разрешимой задачей условной минимизации, можно найти в [14, с. 173, 174]:

$$-\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \to \inf,\ x_2 \leq r,\ x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\},\ r \in \mathbb{R}^1.$$

Здесь $\beta_0(0) = 0$, но $\beta(0) = -\infty$.

Далее будем считать, что мы имеем дело с задачей ($P^{co}_{p,r}$), у которой функция значений $\beta : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ является собственной, то есть $\operatorname{dom}\beta \neq \emptyset$. Это заведомо так, по крайней мере, при условиях следующей леммы.

Лемма 1.3. *Имеет место равенство $\beta(p, r) = \beta_0(p, r)$, если выполняется, по крайней мере, одно из следующих двух условий: 1) f сильно выпуклый на $\mathcal{D}$ функционал; 2) $\mathcal{D}$ ограничено. При этом*

$$\beta_0(p, r) = \{f(z^0_{p,r}),\ \textit{если } z^0_{p,r} \textit{ существует};\ +\infty \textit{ в противном случае}\}\ \forall\,(p, r) \in H \times \mathbb{R}^m.$$

Доказательство. Обоснование равенства обобщенной и классической функций значений проводится в точном соответствии со схемой доказательства полностью аналогичной леммы в [15, лемма 2.4.1].

Введем функционал Лагранжа

$$L_{p,r}(z, \mu_0, \lambda, \mu) \equiv \mu_0 f(z) + \langle \lambda, Az - h - p\rangle + \langle \mu, g(z) - r\rangle,\ \ z \in \mathcal{D},\ \mu_0 \geq 0,\ \lambda \in H,\ \mu \in \mathbb{R}^m,$$

его регулярный вариант $L_{p,r}(z, 1, \lambda, \mu) \equiv L_{p,r}(z, \lambda, \mu)$, вогнутый двойственный функционал $V_{p,r}(\lambda, \mu) \equiv \inf\limits_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}(z, \lambda, \mu)$, $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ и соответствующую двойственную задачу

$$V_{p,r}(\lambda, \mu) \to \sup,\ \ (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+. \tag{1.1}$$

Напомним, что вектором Куна–Таккера задачи ($P^{co}_{p,r}$) называется пара $(\lambda^*, \mu^*) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, для которой $\inf_{z \in \mathcal{D}^0_{p,r}} f(z) \le L_{p,r}(z, \lambda^*, \mu^*) \;\forall\, z \in \mathcal{D}$, где $\inf_{z \in \mathcal{D}^0_{p,r}} f(z) = f(z^0_{p,r})$ в случае разрешимости задачи ($P^{co}_{p,r}$). Известно (см., например, теорему 1.1 и ее доказательство), что любой такой вектор Куна–Таккера (λ^*, μ^*) в паре с $z^0_{p,r}$ составляют седловую точку функции Лагранжа $L_{p,r}(\cdot,\cdot,\cdot)$, а взятый с обратным знаком, то есть вектор $-(\lambda^*, \mu^*)$ — является одновременно элементом субдифференциала (в смысле выпуклого анализа) $\partial\beta(p,r)$ выпуклой полунепрерывной снизу функции значений β в точке (p,r) и нормалью (в смысле выпуклого анализа) вида $(\zeta, -1)$ к $\mathrm{epi}\,\beta$ в точке $(p, r, \beta(p,r))$.

1.2. Недифференциальные принцип Лагранжа и теорема Куна–Таккера в выпуклой задаче на условный экстремум. Сформулируем и докажем параметрический принцип Лагранжа в недифференциальной форме в задаче ($P^{co}_{p,r}$). Он жестко связывает как выполнимость, так и свойства регулярности самого принципа Лагранжа в задаче ($P^{co}_{p,r}$) при фиксированной паре $(p,r) \in \mathrm{dom}\,\beta$ с субдифференциальными свойствами функции значений β в точке (p,r). Одновременно в нем формулируются необходимые и достаточные условия того, что $(p,r) \in \partial \mathrm{dom}\,\beta$. Естественно, при этом нам не нужны дополнительные предположения о дифференцируемости исходных данных. Приводимая ниже теорема уточняет теорему 2.1 в [9]. Ее формулировка и доказательство помогают получению аналогичных результатов в нелинейных задачах на условный экстремум в разделе 2. Автор не исключает, что формулируемый и доказываемый ниже параметрический классический принцип Лагранжа может быть найден еще в какой-либо из большого числа имеющихся к настоящему времени публикаций, посвященных различным вариантам принципа Лагранжа в выпуклых задачах на условный экстремум.

Обозначим через $N_\Omega(x)$ конус нормалей в смысле выпуклого анализа к выпуклому множеству Ω в точке $x \in \Omega \subset H$ где H — гильбертово пространство. При доказательстве принципа Лагранжа нам понадобится (см., например, [5, замечание 4A.2(b)])

Лемма 1.4. *Если $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ выпуклая функция, то $\zeta \in \partial f(x)$, где $\partial f(x)$ — субдифференциал в смысле выпуклого анализа функции f, тогда и только тогда, когда $(\zeta, -1) \in N_{epi\,f}(x, f(x))$, что, в свою очередь, эквивалентно неравенству*

$$\langle (\zeta, -1), (y, r) - (x, f(x)) \rangle \le 0 \;\forall\, (y, r) \in epi\, f.$$

Справедливо также следующее важное, в контексте настоящей статьи, утверждение о плотности субдифференцируемости (см., например, [4, теорема 4.3]).

Лемма 1.5. *Субдифференциал собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, где H — гильбертово пространство, не пуст в точках плотного в $dom\, f$ множества.*

Теорема 1.1. [*Параметрический принцип Лагранжа в недифференциальной форме*] *Пусть функция $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ выпукла, множество $\mathcal{D}$ является выпуклым и замкнутым (возможно неограниченным), $\beta : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — собственная (полунепрерывная снизу выпуклая) функция. Пусть также $(p, r) \in H \times \mathbb{R}^m$ такая точка, что $\beta(p,r) < +\infty$ и $\beta_0(p,r) = \beta(p,r)$. Тогда:*

1. *Если* $z^0_{p,r} \in \mathcal{D}^0_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D} : Az - h - p = 0,\ g_i(z) \le r_i,\ i = 1,\dots,m\}$ *— оптимальный элемент в задаче* $(P^{co}_{p,r})$, *то есть* $f(z^0_{p,r}) = \beta_0(p,r)$, *и* $\zeta \in \partial\beta(p,r)$, *где* $\partial\beta(p,r)$ *— субдифференциал в смысле выпуклого анализа, то для множителей Лагранжа* $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$, $(\lambda,\mu) = -\zeta$, *при* $\mu_0 = 1$ *выполняются соотношения*

$$L_{p,r}(z^0_{p,r},\mu_0,\lambda,\mu) \le L_{p,r}(z,\mu_0,\lambda,\mu)\ \forall\, z \in \mathcal{D},\quad \mu_i(g_i(z^0_{p,r}) - r_i) = 0,\ \ i = 1,\dots,m \tag{1.2}$$

и при этом $-\zeta = (\lambda,\mu)$ *— вектор Куна–Таккера задачи* $(P^{co}_{p,r})$.

И, наоборот, если $\beta(p,r) = \beta_0(p,r)\ \ \forall\,(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$ *и* $\tilde z \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ *такой элемент, что при некоторых* $\mu_0 > 0$, $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$ *выполняются соотношения* (1.2) *с заменой* $z^0_{p,r}$ *на* $\tilde z$, *то этот элемент оптимален в задаче* $(P^{co}_{p,r})$, *то есть* $\tilde z = z^0_{p,r}$, *пара* $(\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0)$ *является вектором Куна–Таккера для нее и одновременно* $(-\lambda/\mu_0, -\mu/\mu_0) \in \partial\beta(p,r)$.

2. *Если* $z^0_{p,r} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ *— оптимальный элемент в задаче* $(P^{co}_{p,r})$, $(p,r) \in \partial\, dom\beta$ *и* $\zeta \in \partial^\infty\beta(p,r)$, $\zeta \ne 0$, *где* $\partial^\infty\beta(p,r)$ *— сингулярный (асимптотический) субдифференциал (см., например, [5]), определяемый формулой*

$$\partial^\infty\beta(p,r) \equiv \{(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m :\ ((\lambda,\mu),0) \in N_{epi\,\beta}((p,r),\beta(p,r))\},$$

то для множителей Лагранжа $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$, $(\lambda,\mu) = -\zeta$, *соотношения* (1.2) *выполняются при* $\mu_0 = 0$.

И, наоборот, если $\beta(p,r) = \beta_0(p,r)\ \ \forall\,(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$ *и* $\tilde z \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ *— такой элемент, что при* $\mu_0 = 0$ *и некоторых* $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$, $(\lambda,\mu) \ne 0$, *выполняются соотношения* (1.2) *с заменой* $z^0_{p,r}$ *на* $\tilde z$, *то* $(p,r) \in \partial\, dom\,\beta$ *и одновременно* $(-\lambda,-\mu) \in \partial^\infty\beta(p,r)$.

Замечание 1.1. Первая часть теоремы 1.1 представляет собой, по сути дела, формулировку классической теоремы Куна–Таккера (см., например, [1, 16, 17]) с использованием вместо понятия вектора Куна–Таккера эквивалентного в данном контексте понятия субдифференциала функции значений. При этом пара двойственных переменных $(\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0)$, о которой идет речь в обоих утверждениях первой части теоремы, является одновременно вектором Куна–Таккера задачи $(P^{co}_{p,r})$ и решением двойственной задачи (1.1).

Замечание 1.2. Важным является то, что принципом Лагранжа теоремы 1.1 «не охватываются» задачи $(P^{co}_{p,r})$, для которых одновременно $\partial\beta(p,r) = \emptyset$ и $\partial^\infty\beta(p,r) = \{0\}$, что вполне возможно для задач с ограничениями, задаваемыми операторами с бесконечномерными образами. Из теоремы следует, что обычный невырожденный (регулярный или нерегулярный) принцип Лагранжа в задаче $(P^{co}_{p,r})$ выполняется тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений $\partial\beta(p,r) \ne \emptyset$, $\partial^\infty\beta(p,r) \ne \{0\}$.

Доказательство. Доказываем первое утверждение первой части теоремы 1.1. В силу леммы 1.4 можем записать

$$\langle((-\lambda,-\mu),-1),((\gamma,\omega),s) - ((p,r),\beta(p,r))\rangle \le 0\ \ \forall\,((\gamma,\omega),s) \in \mathrm{epi}\,\beta \tag{1.3}$$

или

$$-\langle\lambda,\gamma - p\rangle - \langle\mu,\omega - r\rangle \le s - \beta(p,r)\ \ \forall\,((\gamma,\omega),s) \in \mathrm{epi}\,\beta$$

или

$$\langle \lambda, \gamma \rangle + \langle \mu, \omega \rangle + s \geq \langle \lambda, p \rangle + \langle \mu, r \rangle + \beta(p, r) \ \ \forall\, ((\gamma, \omega), s) \in \operatorname{epi} \beta.$$

Последнее означает, что точка $(z^0_{p,r}, (p, r)) \in \mathcal{D} \times H \times \mathbb{R}^m$, с учетом включения $\operatorname{epi} \beta_0 \subseteq \operatorname{epi} \beta$ (так как $\beta(p, r) \leq \beta_0(p, r)$), доставляет минимальное значение в задаче

$$\widetilde{f}(z, \gamma, \omega) \equiv f(z) + \langle \lambda, \gamma \rangle + \langle \mu, \omega \rangle \to \min, \tag{1.4}$$

$$Az - h = \gamma, \quad g(z) \leq \omega \quad (z, (\gamma, \omega)) \in \mathcal{D} \times H \times \mathbb{R}^m.$$

Действительно, если $Az - h = \gamma$, $g(z) \leq \omega$, то $(z, (\gamma, \omega))$ такая точка, что $((\gamma, \omega), f(z)) \in \operatorname{epi} \beta$ и, значит,

$$\langle \lambda, \gamma \rangle + \langle \mu, \omega \rangle + f(z) \geq \langle \lambda, p \rangle + \langle \mu, r \rangle + \beta(p, r).$$

Получим условия оптимальности этой точки в задаче (1.4).

Покажем сначала, что $\mu \geq 0$ и выполняется условие дополняющей нежесткости. Можем записать $\langle \mu, r \rangle \leq \langle \mu, \omega \rangle \ \forall\, \omega \in \mathbb{R}^m$ такого, что $g(z^0_{p,r}) \leq \omega$, так как в силу (1.4)

$$f(z^0_{p,r}) + \langle \lambda, p \rangle + \langle \mu, r \rangle \leq f(z^0_{p,r}) + \langle \lambda, p \rangle + \langle \mu, \omega \rangle \ \forall\, \omega \in \mathbb{R}^m \text{ такого, что } g(z^0_{p,r}) \leq \omega.$$

Тогда в силу указанного произвола ω из неравенства $\langle \mu, \omega - r \rangle \geq 0$, справедливого для любого $\omega \geq r$, так как $g(z^0_{p,r}) \leq r$ и для любого $\omega \geq r$ имеет место неравенство $g(z^0_{p,r}) \leq \omega$, выводим включение $\mu \in \mathbb{R}^m_+$. Одновременно при $\omega = g(z^0_{p,r})$ получаем неравенство $\langle \mu, g(z^0_{p,r}) - r \rangle \geq 0$, которое в паре с другим неравенством $\langle \mu, g(z^0_{p,r}) - r \rangle \leq 0$, являющимся следствием включения $\mu \in \mathbb{R}^m_+$ и неравенства $g(z^0_{p,r}) \leq r$, влечет равенство $\langle \mu, g(z^0_{p,r}) - r \rangle = 0$, из которого в силу противоположных знаков сомножителей вытекает условие дополняющей нежесткости $\mu_i(g_i(z^0_{p,r}) - r_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Далее, в силу (1.4) можем записать,

$$f(z^0_{p,r}) + \langle \lambda, p \rangle + \langle \mu, r \rangle \leq f(z) + \langle \lambda, \gamma \rangle + \langle \mu, \omega \rangle, \ Az - h = \gamma, \ g(z) \leq \omega, \ (z, (\gamma, \omega)) \in \mathcal{D} \times H \times \mathbb{R}^m,$$

то есть

$$f(z^0_{p,r}) + \langle \lambda, Az^0_{p,r} - h - p \rangle \leq f(z) + \langle \lambda, Az - h - p \rangle + \langle \mu, \omega - r \rangle \ \forall (z, \omega) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m, \ g(z) \leq \omega,$$

откуда в силу доказанного условия дополняющей нежесткости имеем

$$f(z^0_{p,r}) + \langle \lambda, Az^0_{p,r} - h - p \rangle + \langle \mu, g(z^0_{p,r}) - r \rangle \leq$$

$$f(z) + \langle \lambda, Az - h - p \rangle + \langle \mu, \omega - r \rangle \ \forall (z, \omega) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m, \ g(z) \leq \omega,$$

и при $\omega = g(z)$

$$f(z^0_{p,r}) + \langle \lambda, Az^0_{p,r} - h - p \rangle + \langle \mu, g(z^0_{p,r}) - r \rangle \leq f(z) + \langle \lambda, Az - h - p \rangle + \langle \mu, g(z) - r \rangle \ \forall\, z \in \mathcal{D},$$

или

$$L_{p,r}(z, \lambda, \mu) \geq L_{p,r}(z^0_{p,r}, \lambda, \mu) \ \forall\, z \in \mathcal{D},$$

то есть получены все соотношения принципа Лагранжа в недифференциальной форме.

Заметим здесь же, что одновременно в силу выпуклости задачи нами доказано, что элемент $-\zeta = (\lambda, \mu)$ является и ее вектором Куна-Таккера. Таким образом, первое утверждение первой части теоремы доказано.

Доказываем второе утверждение первой части теоремы. Пусть $z^0_{p,r} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ такой элемент, что при некоторых $\mu_0 > 0$, $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ выполняются соотношения (1.2). Тогда, очевидно, точка $z^0_{p,r} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ доставляет минимальное значение в задаче

$$\mu_0 f(z) + \langle \lambda, Az - h - p\rangle + \langle \mu, g(z) - r\rangle \to \min, \quad z \in \mathcal{D}.$$

Отсюда с учетом условия дополняющей нежесткости в (1.2) имеем

$$\mu_0 f(z^0_{p,r}) = \mu_0 f(z^0_{p,r}) + \langle \lambda, Az^0_{p,r} - h - p\rangle + \langle \mu, g(z^0_{p,r}) - r\rangle \leq \tag{1.5}$$

$$\mu f(z) + \langle \lambda, Az - h - p\rangle + \langle \mu, g(z) - r\rangle \quad \forall\, z \in \mathcal{D}.$$

Поэтому для всех $z \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ можем записать $\mu_0 f(z^0_{p,r}) \leq \mu_0 f(z)$, и, значит, в силу положительности μ_0 имеем $f(z^0_{p,r}) \leq f(z) \ \ \forall\, z \in \mathcal{D}^0_{p,r}$. Заметим, что одновременно из (1.5) вытекает, что

$$\beta(p,r) = f(z^0_{p,r}) \leq f(z) + \langle \lambda/\mu_0, Az - h - p\rangle + \langle \mu/\mu_0, g(z) - r\rangle \quad \forall\, z \in \mathcal{D},$$

то есть $(\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0)$ — вектор Куна–Таккера. Из последнего неравенства выводим также

$$\beta(p,r) + \langle (\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0), (p,r)\rangle \leq f(z) + \langle (\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0), (Az - h, g(z))\rangle \ \ \forall\, z \in \mathcal{D},$$

откуда, в свою очередь, с учетом равенства $\beta(p,r) = \beta_0(p,r) \ \ \forall\,(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$, получаем

$$\beta(p,r) - \langle -(\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0), (p,r)\rangle \leq I - \langle -(\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0), (\gamma,\omega)\rangle \ \ \forall\,(\gamma,\omega) \in \operatorname{dom}\beta, \ I \geq \beta(\gamma,\omega),$$

или

$$\langle (-(\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0), -1), ((\gamma,\omega), I) - ((p,r), \beta(p,r))\rangle \leq 0 \ \ \forall\,((\gamma,\omega), I) \in \operatorname{epi}\beta,$$

что в силу леммы 1.4 означает справедливость включения $-(\lambda/\mu_0, \mu/\mu_0) \in \partial\beta(p,r)$.

Доказываем утверждения второй части теоремы. В случае первого утверждения второй части имеем вместо неравенства (1.3) неравенство

$$\langle ((-\lambda, -\mu), 0), ((\gamma,\omega), s) - ((p,r), \beta(p,r))\rangle \leq 0 \ \forall\,((\gamma,\omega), s) \in \operatorname{epi}\beta \text{ или } \forall\,(\gamma,\omega) \in \operatorname{dom}\beta$$

и, соответственно, точка $(z^0_{p,r}, (p,r)) \in \mathcal{D} \times H \times \mathbb{R}^m$ доставляет минимальное значение в задаче (с учетом включения $\operatorname{dom}\beta_0 \subseteq \operatorname{dom}\beta$)

$$\widetilde{f}(z,\gamma,\omega) \equiv \langle \lambda, \gamma\rangle + \langle \mu, \omega\rangle \to \min, \ \ Az - h = \gamma, \ \ g(z) \leq \omega, \quad (z, (\gamma,\omega)) \in \mathcal{D} \times H \times \mathbb{R}^m.$$

Повторяя далее практически дословно рассуждения доказательства первого утверждения первой части, получаем, что для множителей Лагранжа $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$, $(\lambda, \mu) = -\zeta$, соотношения (1.2) выполняются при $\mu_0 = 0$.

Доказываем, наконец, второе утверждения второй части теоремы. В том случае, если $\mu_0 = 0$, вместо неравенства (1.5) при доказательстве второго утверждения первой части, имеем неравенство

$$0 \le \langle \lambda, Az - h - p \rangle + \langle \mu, g(z) - r \rangle \quad \forall\, z \in \mathcal{D}. \tag{1.6}$$

Перепишем неравенство (1.6) в виде

$$-\langle -(\lambda, \mu), (p, r) \rangle \le -\langle -(\lambda, \mu), (Az - h, g(z)) \rangle \quad \forall\, z \in \mathcal{D},$$

откуда, также, как и выше в случае $\mu_0 > 0$, получаем

$$-\langle -(\lambda, \mu), (p, r) \rangle \le -\langle -(\lambda, \mu), (\gamma, \omega) \rangle \quad \forall\, (\gamma, \omega) \in \operatorname{dom} \beta.$$

Отсюда, с учетом определения нормали (в смысле выпуклого анализа), следует, что $(-\lambda, -\mu) \in N_{\operatorname{dom} \beta}(p, r)$, то есть $(p, r) \in \partial \operatorname{dom} \beta$ и одновременно $((-\lambda, -\mu), 0) \in N_{\operatorname{epi} \beta}((p, r), \beta(p, r))$, то есть $-(\lambda, \mu) \in \partial^\infty \beta(p, r)$. Теорема полностью доказана.

1.3. Субдифференциалы функции значений и множители Лагранжа. В данном разделе изучим на основе принципа Лагранжа теоремы 1.1 теснейшую связь свойств субдифференцируемости (в смысле выпуклого анализа) функции значений задачи ($P^{co}_{p,r}$) с участвующими в формулировке теоремы множителями Лагранжа. В заключение раздела будут получены явные формулы для субдифференциала $\partial \beta(p, r)$ и асимптотического субдифференциала $\partial^\infty \beta(p, r)$ функции значений в терминах множителей Лагранжа. Введем определение стационарного элемента в задаче ($P^{co}_{p,r}$), согласованное с теоремой 1.1.

О п р е д е л е н и е 1.1. Некоторый элемент $\tilde{z} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ (вообще говоря, не обязательно оптимальный) называется стационарным в задаче ($P^{co}_{p,r}$), если он удовлетворяет всем соотношениям (1.2), в которых $z^0_{p,r}$ следует заменить на $\tilde{z}$, при некотором невырожденном наборе множителей Лагранжа $(\mu_0, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^1_+ \times H \times \mathbb{R}^m_+$.

Важное замечание состоит в следующем.

З а м е ч а н и е 1.3. Существуют разрешимые задачи $(P^{co}_{p,r})$ (с бесконечномерным H), в которых нет стационарных элементов. Такие задачи, в которых показывается невыполнимость принципа Лагранжа, можно найти, например, в [9, 10, 13].

О п р е д е л е н и е 1.2. Стационарный элемент $\tilde{z} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ называется нормальным в задаче $(P^{co}_{p,r})$, если для любого невырожденного набора множителей Лагранжа $(\mu_0, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^1_+ \times H \times \mathbb{R}^m_+$, соответствующего ему согласно определению 1.1, справедливо строгое неравенство $\mu_0 > 0$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Стационарный элемент $\tilde{z} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ называется регулярным в задаче $(P^{co}_{p,r})$, если существует невырожденный набор множителей Лагранжа $(\mu_0, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^1_+ \times H \times \mathbb{R}^m_+$, соответствующий ему согласно определению 1.1, для которого справедливо строгое неравенство $\mu_0 > 0$.

Определение 1.4. Стационарный элемент $\tilde{z} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ называется анормальным в задаче $(P^{co}_{p,r})$, если для любого невырожденного набора множителей Лагранжа $(\mu_0, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^1_+ \times H \times \mathbb{R}^m_+$, соответствующего ему согласно определению 1.1, справедливо равенство $\mu_0 = 0$.

Введем далее определения нормальной, регулярной и анормальной задачи $(P^{co}_{p,r})$.

Определение 1.5. Задача $(P^{co}_{p,r})$, при условии существования в ней стационарных элементов, называется нормальной, если все ее стационарные элементы нормальны.

Определение 1.6. Задача $(P^{co}_{p,r})$, при условии существования в ней стационарных элементов, называется регулярной, если в ней существует регулярный стационарный элемент.

Определение 1.7. Задача $(P^{co}_{p,r})$, при условии существования в ней стационарных элементов, называется анормальной, если все ее стационарные элементы анормальны.

Из теоремы 1.1 и определений 1.5, 1.6, 1.7 вытекают следующие утверждения.

Лемма 1.6. *Пусть функция $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ выпукла, множество $\mathcal{D}$ является выпуклым и замкнутым (возможно неограниченным), $\beta : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — собственная (полунепрерывная снизу выпуклая) функция и $\beta_0(p,r) = \beta(p,r)\ \forall (p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$. Пусть также $(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$ такая точка, что $\beta(p,r) < +\infty$ и в задаче $(P^{co}_{p,r})$ существует стационарный элемент. Тогда:*

***1.** Задача $(P^{co}_{p,r})$ является нормальной тогда и только тогда, когда одновременно выполняются соотношения $\partial\beta(p,r) \neq \emptyset$ и $\partial^\infty\beta(p,r) = \{0\}$;*

***2.** Если задача $(P^{co}_{p,r})$ является регулярной, то $\partial\beta(p,r) \neq \emptyset$;*

***3.** Если задача $(P^{co}_{p,r})$ является анормальной, то $\partial^\infty\beta(p,r) \neq \{0\}$.*

В то же время, если мы добавим к условиям леммы 1.6 и условие разрешимости задачи, то легко получить следующее утверждение в качестве следствия теоремы 1.1.

Лемма 1.7. *Если, при условиях леммы 1.6, задача $(P^{co}_{p,r})$ разрешима, то есть $Z^0_{p,r} \neq \emptyset$, и в ней существуют стационарные элементы, то она является нормальной (регулярной; анормальной) тогда и только тогда, когда одновременно выполняются соотношения (выполняется соотношение; одновременно выполняются соотношения) $\partial\beta(p,r) \neq \emptyset$ и $\partial^\infty\beta(p,r) = \{0\}$ $(\partial\beta(p,r) \neq \emptyset;\ \partial\beta(p,r) = \emptyset$ и $\partial^\infty\beta(p,r) \neq \{0\})$.*

Введем далее множества

$L^\nu_{p,r} \equiv \{-(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+ : \xi \equiv (\mu_0,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^1_+ \times H \times \mathbb{R}^m_+,\ \xi \neq 0,\ \mu_0 = \nu,$ тройка ξ в совокупности с элементом $z^0_{p,r}$ удовлетворяет соотношениям (1.2)$\}$, $\nu = 0, 1$; $M^0_{p,r} \equiv L^0_{p,r} \bigcup \{0\}$, $M^1_{p,r} \equiv L^1_{p,r}$, а также множество $M_{p,r}$ всех векторов Куна–Таккера задачи $(P^{co}_{p,r})$. Тогда непосредственным следствием теоремы 1.1 является следующая

Лемма 1.8. *Пусть в задаче $(P^{co}_{p,r})$ имеются стационарные элементы и она разрешима. Тогда при условиях теоремы 1.1 и при условии $\beta(p,r) = \beta_0(p,r)\ \ \forall (p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$ справедливы равенства $\partial\beta(p,r) = M^1_{p,r} = -M_{p.r}$, $\partial^\infty\beta(p,r) = M^0_{p,r}$.*

Различные результаты, связывающие субдифференциальные свойства функций значений задач на условный экстремум с множителями Лагранжа, были получены в разное время целым рядом авторов, среди которых, в первую очередь, укажем на результаты Ф. Кларка (см. известную монографию [6], а также список литературы в ней). В то же время, с формальной точки зрения, автору не известны «координаты» какой-либо работы, в которой были бы получены формулы леммы (1.8) для задачи вида ($P^{co}_{p,r}$).

1.4. Принцип Лагранжа и неустойчивость задач на условный экстремум. Покажем, прежде всего, что задачам $(P^{co}_{p,r})$, которые не являются нормальными, свойственна неустойчивость в том смысле, что в любой «окрестности» каждой такой задачи существуют другие аналогичные задачи со значением $+\infty$. Доказательство этого важного факта заключается, по сути дела, в ссылке на вторую часть второго утверждения теоремы 1.1. Из утверждения этой второй части следует, что, если соотношения (1.2) с заменой $z^0_{p,r}$ на $\tilde z$ выполняются для некоторого $\tilde z \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ при $\mu_0 = 0$ (это и означает, что задача ($P^{co}_{p,r}$) не является нормальной), то $(p,r) \in \partial\, dom\, \beta$, что и означает, что в любой «окрестности» задачи $(P^{co}_{p,r})$ существуют задачи с бесконечным значением. В данном контексте естественно задаться вопросом: много ли неустойчивых задач? Отвечая совсем коротко, можно сказать, что неустойчивых задач «очень много», во всяком случае, «никак не меньше», чем устойчивых. По этой причине классический принцип Лагранжа, если предполагать, что исходные данные могут быть неточными, перестает быть формально корректным (подробности см. в [9, 10, 12, 13]) для огромного числа важнейших оптимизационных задач.

1.5. «Нерегулярная часть» принципа Лагранжа как следствие его «регулярной части». Покажем далее, что первая часть утверждения **2** теоремы 1.1, по сути дела, является следствием первой же части утверждения **1** той же теоремы. Это обстоятельство вытекает из свойств субдифференциала и асимптотического субдифференциала полунепрерывной снизу выпуклой функции в гильбертовом пространстве, которые можно найти, например, в [5, p. 82]). Для упрощения изложения предполагаем, что f — субдифференцируемый в точках $\mathcal{D}$ функционал.

Предположим для этого сначала, что $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — сильно выпуклый функционал и в рассматриваемой ситуации $\partial\beta(p,r) = \emptyset$, а сингулярный (асимптотический) субдифференциал $\partial^\infty\beta(p,r)$ содержит ненулевой элемент. В этом случае воспользуемся известным представлением для асимптотического субдифференциала выпуклого полунепрерывного снизу функционала (см., например, [5, p. 82])

$$\partial^\infty\beta(p,r) = \limsup_{(p',r') \xrightarrow{\beta} (p,r),\, t\downarrow 0} t\partial\beta(p',r') \equiv \{w - \lim_{k\to\infty} t_k\zeta_k : t_k \downarrow 0,\ \zeta_k \in \partial\beta(p^k,r^k),\ (p^k,r^k) \xrightarrow{\beta} (p,r)\},$$

где символ $(p',r') \xrightarrow{\beta} (p,r)$ означает, что $((p',r'),\beta(p',r')) \to ((p,r),\beta(p,r))$, а символ $t \downarrow 0$ означает сходимость к нулю справа.

Умножим неравенство в (1.2) при $\mu_0 = 1$ на $s > 0$

$$L_{p,r}(z^0_{p,r}, s, s\lambda_{p,r}, s\mu_{p,r}) \le L_{p,r}(z, s, s\lambda_{p,r}, s\mu_{p,r}) \tag{1.7}$$

и поступим следующим образом. Для любой слабой предельной точки вида

$$(\tilde\lambda_{p,r}, \tilde\mu_{p,r}) = w - \lim_{k\to\infty,\, (p^k,r^k) \xrightarrow{\beta} (p,r),\, s_k\downarrow 0} s_k(\lambda^k_{p^k,r^k}, \mu^k_{p^k,r^k})$$

с $(\lambda^k_{p^k,r^k}, \mu^k_{p^k,r^k}) \in \partial\beta(p^k, r^k)$ можем записать после очевидного предельного перехода в (1.7) при $(p,r) = (p^k, r^k)$, $(\lambda_{p,r}, \mu_{p,r}) = (\lambda^k_{p^k,r^k}, \mu^k_{p^k,r^k})$, $s = s_k$

$$L_{p,r}(z^0_{p,r}, 0, \tilde\lambda_{p,r}, \tilde\mu_{p,r}) \le L_{p,r}(z, 0, \tilde\lambda_{p,r}, \tilde\mu_{p,r}). \tag{1.8}$$

Одновременно в силу условия дополняющей нежесткости $\mu_{p^k,r^k,i}(g_i(z^0_{p^k,r^k}) - r^k_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$ в результате предельного перехода при $k \to \infty$ и предельного соотношения $z^0_{p^k,r^k} \to z^0_{p,r}$, $k \to \infty$ (это предельное соотношение является следствием слабой сходимости $z^0_{p^k,r^k}$ к $z^0_{p,r}$, числовой сходимости $f(z^0_{p^k,r^k})$ к $f(z^0_{p,r})$ при $k \to \infty$, субдифференцируемости в точках $\mathcal{D}$ и сильной выпуклости f) получаем $\tilde\mu_{p,r,i}(g_i(z^0_{p,r}) - r_i) = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, что в совокупности с (1.8) и означает выполнимость нерегулярного невырожденного принципа Лагранжа. При этом мы аппроксимировали решение $z^0_{p,r}$ задачи ($P^{co}_{p,r}$) точками $z^0_{p^k,r^k}$, доставляющими минимальное значение функциям Лагранжа $L_{p^k,r^k}(z, \lambda_{p^k,r^k}, \mu_{p^k,r^k})$, $z \in \mathcal{D}$.

Пусть далее $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — выпуклый функционал и $\partial\beta(p,r) = \emptyset$, а $\partial^\infty\beta(p,r) \ne \{0\}$. Пусть также $z^0_{p,r}$ — произвольный элемент из множества $Z^0_{p,r}$. Рассмотрим вспомогательную задачу с сильно выпуклым целевым функционалом

$$(\widetilde{P}^{co}_{p,r}) \qquad f(z) + \|z - z^0_{p,r}\|^2 \to \min,\ \ Az = h + p,\ \ g_i(z) \le r_i,\ i = 1,\ldots,m, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z.$$

Ее особенностью является то, что при всех $(p', r') \in \operatorname{dom}\beta = \operatorname{dom}\widetilde\beta$ имеет место неравенство $\widetilde\beta(p', r') \ge \beta(p', r')$, а в точке (p,r) — равенство $\widetilde\beta(p,r) = \beta(p,r)$. При этом $\operatorname{epi}\widetilde\beta \subset \operatorname{epi}\beta$ и, стало быть, любая нормаль (в смысле выпуклого анализа) к надграфику $\operatorname{epi}\beta$ в точке $(p, r, \beta(p,r))$ будет одновременно нормалью (в том же смысле) в той же точке и к надграфику $\operatorname{epi}\widetilde\beta$. По этой причине в задаче $(\widetilde{P}^{co}_{p,r})$ с сильно выпуклым целевым функционалом имеет место неравенство $\partial^\infty\widetilde\beta(p,r) \ne \{0\}$. Повторяя в этой ситуации проведенные выше для случая сильно выпуклого функционала цели рассуждения и принимая во внимание равенство нулю в точке $z^0_{p,r}$ вспомогательного сильно выпуклого слагаемого, приходим к выводу о том, что и в случае выпуклого функционала цели в задаче ($P^{co}_{p,r}$) для любого оптимального элемента $z^0_{p,r}$ выполняются все соотношения нерегулярного невырожденного принципа Лагранжа.

2. Модифицированные теоремы Куна–Таккера в нелинейных задачах на условный экстремум

Для формулировки и доказательства модифицированных теорем Куна–Таккера в нелинейных задачах на условный экстремум нам потребуются, прежде всего, понятия проксимального субградиента и субдифференциала Фреше полунепрерывной снизу функции в гильбертовом пространстве (см., например, [5–8]) и некоторые необходимые, связанные с ними факты. Понятия проксимального субградиента и субдифференциала Фреше полунепрерывной снизу функции можно трактовать как обобщения понятия субдифференциала в смысле выпуклого анализа на полунепрерывные снизу функции. Подчеркнем, что ниже, в отличие от раздела 1, будут рассматриваться только соответствующие аналоги первой части теоремы 1.1 — «нелинейные» модифицированным теоремы Куна–Таккера. Множества допустимых элементов $\mathcal{D}$ рассматриваемых ниже в данном разделе нелинейных задач являются ограниченными, что обусловлено естественным желанием разумного упрощения изложения, в частности, и в связи с ограничением на объем статьи. По той же причине мы не занимаемся здесь, в нелинейных задачах, вопросами, аналогичными тем, которые были рассмотрены в разделах 1.3–1.5 в случае выпуклой задачи ($P^{co}_{p,r}$).

2.1. Проксимальные нормали, проксимальные субградиенты. Первым из используемых ниже двух понятий субдифференциалов является понятие проксимального субградиента полунепрерывной снизу функции (см., например, [5,6,8]) в гильбертовом пространстве. Напомним кратко необходимые факты, связанные с этим понятием. Для этого сначала напомним понятие проксимальной нормали.

Определение 2.1. (а) Пусть H — гильбертово пространство, $S \subset H$ — замкнутое множество, $\bar{s} \in S$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальной нормалью к множеству S в точке $\bar{s} \in S$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\langle \zeta, s - \bar{s} \rangle \leq M \|s - \bar{s}\|^2 \ \ \forall\, s \in S. \tag{2.1}$$

Множество всех таких векторов ζ, являющееся конусом, обозначим через $\hat{N}^P_S(\bar{s})$ и назовем проксимальным нормальным конусом.

(б) Пусть $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, если $(\zeta, -1) \in \hat{N}^P_{\operatorname{epi} f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Множество всех таких векторов ζ обозначим через $\partial^P f(\bar{x})$ и назовем проксимальным субградиентом f в точке $\bar{x}$.

Замечание 2.1. Неравенство (2.1) может быть записано в виде

$$\langle \frac{1}{2M}\zeta, s - \bar{s} \rangle \leq \frac{1}{2}\|s - \bar{s}\|^2 \ \ \forall\, s \in S.$$

которое, согласно лемме 3С.2 в [5], эквивалентно включению

$$\bar{s} \in Pr_S(\bar{s} + \frac{1}{2M}\zeta).$$

Другими словами, ζ есть проксимальная нормаль к S в $\bar{s}$ тогда и только тогда, когда $\bar{s}$ есть ближайшая в S точка к некоторой точке вида $\bar{s} + t\zeta$, $t > 0$.

Напомним, наконец, критерий того, что данный вектор является проксимальным субградиентом полунепрерывной снизу функции в заданной точке (см., например, [5, утверждение 4А.3]).

Лемма 2.1. *Пусть H — гильбертово пространство, $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in dom\, f$. Вектор $\zeta \in H$ является проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, то есть $\zeta \in \partial^P f(x)$, тогда и только тогда, когда существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ такие, что*

$$\langle \zeta, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + R\|x - \bar{x}\|^2 \ \ \forall\, x \in S_\delta(\bar{x}) \equiv \{x' \in H : \ \|x' - \bar{x}\| < \delta\}$$

или

$$f(\bar{x}) - \langle \zeta, \bar{x} \rangle \leq f(x) - \langle \zeta, x \rangle + R\|x - \bar{x}\|^2 \ \ \forall\, x \in S_\delta(\bar{x}).$$

2.2. Нормали Фреше, субдифференциалы Фреше. Напомним далее понятие нормали Фреше к замкнутому множеству в банаховом пространстве, а также соответствующее понятие субдифференциала Фреше полунепрерывной снизу функции [7]. Следующие определения и утверждения могут быть найдены в [7].

Определение 2.2. Пусть Ω — непустое множество банахова пространства X. Пусть $\bar{x} \in \Omega$ и $u \xrightarrow{\Omega} x$ означает, что $u \to x$ с $u \in \Omega$. Тогда непустое множество

$$\hat{N}^F_\Omega(\bar{x}) \equiv \{x^* \in X^* : \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \frac{\langle x^*, u - \bar{x} \rangle}{\|u - \bar{x}\|} \le 0\},$$

являющееся конусом, называется нормальным конусом Фреше к Ω в точке $\bar{x}$.

Лемма 2.2. *Пусть Ω — непустое множество банахова пространства X и $\bar{x} \in \Omega$. Тогда $x^* \in \hat{N}^F_\Omega(\bar{x})$ в том и только в том случае, если для любого $\gamma > 0$ функция*

$$\psi(x) \equiv \langle x^*, x - \bar{x} \rangle - \gamma\|x - \bar{x}\|$$

достигает локального максимума относительно множества Ω в точке $\bar{x}$.

Определение 2.3. Пусть $f : X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — функция, определенная на банаховом пространстве X, $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Множество

$$\hat{\partial}^F f(\bar{x}) \equiv \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in \hat{N}^F_{\operatorname{epi} f}((\bar{x}, f(\bar{x})))\}$$

называется субдифференциалом Фреше функции f в точке $\bar{x}$. При этом полагается $\hat{\partial}^F f(\bar{x}) = \emptyset$ в случае $\bar{x} \notin \operatorname{dom} f$.

Замечание 2.2. Субдифференциал $\hat{\partial}^F f(\bar{x})$ может быть записан в виде

$$\hat{\partial}^F f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* : \liminf_{u \to x} \frac{f(u) - f(x) - \langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \ge 0\}.$$

Лемма 2.3. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — функция, определенная на банаховом пространстве X, $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Тогда $x^* \in \hat{\partial}^F f(x)$ в том и только в том случае, если для любого $\gamma > 0$ функция*

$$\psi(x) \equiv f(x) - f(\bar{x}) - \langle x^*, x - \bar{x} \rangle + \gamma\|x - \bar{x}\|$$

достигает локального минимума в точке $\bar{x}$ или, другими словами,

$$f(\bar{x}) - \langle x^*, \bar{x} \rangle \le f(x) - \langle x^*, x \rangle + \gamma\|x - \bar{x}\| \;\; \forall\, x \in X_\gamma,$$

где X_γ — некоторая окрестность точки $\bar{x}$.

Замечание 2.3. Важнейшим свойством полунепрерывных снизу функций $f : X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ является то, что как множество $\partial^P f(x)$ в случае гильбертова пространства X, так и множество $\hat{\partial}^F f(x)$ в случае пространства X из достаточно обширного класса банаховых пространств (подробности см., например, в [5–8]) не пусто для плотного в $\operatorname{dom} f$ множества точек x. В настоящей работе в качестве пространства X выступает гильбертово пространство H, для которого указанные выше свойства заведомо справедливы.

З а м е ч а н и е 2.4. Из определений 2.1 и 2.3 следует, что в случае заданной на гильбертовом пространстве X полунепрерывной снизу функции $f: X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ имеет место включение $\partial^P f(x) \subset \hat{\partial}^F f(x)$. При этом, как отмечено в [7], функция одного переменного $-|x|^{3/2}$ представляет собою пример такой функции, для которой $\partial^P f(0) = \emptyset$, но, одновременно, $\hat{\partial}^F f(0) = 0$.

2.3. Постановка нелинейной задачи на условный экстремум. Будем рассматривать сформулированную во введении параметрическую нелинейную задачу ($P_{p,r}$) на условный экстремум в гильбертовом пространстве с операторным ограничением типа равенства и конечным числом функциональных неравенств. Будем также считать, что $\forall\, z_1,\, z_2 \in \mathcal{D}$ и для некоторой постоянной $L > 0$

$$|f(z_1)-f(z_2)| \le L\|z_1-z_2\|,\ \|g(z_1)-g(z_2)\| \le L\|z_1-z_2\|,\ |h(z_1)-h(z_2)| \le L\|z_1-z_2\|. \quad (2.2)$$

Будем, как и в случае выпуклой задачи, иметь дело с двумя определенными во введении функциями значений: классической функций значений β_0 и обобщенной — β. В нелинейных задачах строгое неравенство $\beta < \beta_0$ возможно и при ограниченном $\mathcal{D}$.

П р и м е р 2.1. Ситуация строгого неравенства реализуется, например, в задаче нелинейного программирования в виде задачи оптимального управления с ограничением-равенством

$$\int_0^1 (x^2(t) - u^2(t))dt \to \inf,\ \ \dot{x} = u(t),\ \ x(0) = 0,$$

$$u(t) \in U \text{ при п.в. } t \in (0,1),\ \ U = \{-1, 1\},\ \ \ x(t) = p(t) \text{ при п.в. } t \in [0,1],\ \ p \in L_2(0,1)$$

с $p = 0$, в которой, как можно заметить, $\beta(0) = -1$, но $\beta_0(0) = +\infty$. Если же взять в этой задаче $U = [-1, 1]$, то тогда $\beta(0) = -1 < 0 = \beta_0(0)$.

В то же время, справедлива следующая важная для дальнейших построений

Лемма 2.4. *Функция значений* $\beta: H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ *является полунепрерывной снизу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма доказывается точно так же, как и в случае выпуклой задачи в лемме 1.2.

Предположим с целью упрощения изложения, что в задаче ($P_{p,r}$) имеет место равенство $\beta(p,r) = \beta_0(p,r)\ \forall\,(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$. Будем, как и ранее, через $z^0_{p,r} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ обозначать решения задачи ($P_{p,r}$) в случае их существования.

2.4. Модифицированная теорема Куна–Таккера в предположении непустоты проксимального субградиента. Пусть в задаче ($P_{p,r}$) оптимальный элемент существует и выполняется условие непустоты проксимального субградиента $\partial^P \beta(p,r) \neq \emptyset$ и $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p,r)$. Тогда, применяя лемму 2.1, можем утверждать, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ (зависящие от точки (p,r) и элемента ζ) такие, что

$$\beta(p,r) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle \le \beta(p',r') - \langle \zeta_p, p'\rangle - \langle \zeta_r, r'\rangle + R\|p'-p\|^2 + R|r'-r|^2 \qquad (2.3)$$

$$\forall\,(p',r') \in S_\delta(p,r) \equiv \{(p',r') \in H : \|(p',r') - (p,r)\| < \delta\}.$$

Учитывая ограниченность β и $\operatorname{dom}\beta$ (в силу условий (2.2) и ограниченности $\mathcal{D}$), из последнего неравенства без ограничения общности выводим, что

$$\beta(p,r) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle \le \beta(p',r') - \langle \zeta_p, p'\rangle - \langle \zeta_r, r'\rangle + R\|p'-p\|^2 + R|r'-r|^2 \tag{2.4}$$

$$\forall\,(p',r') \in H \times \mathbb{R}^m.$$

Покажем, прежде всего, что из неравенства (2.4) следует, что $\zeta_r \le 0$. Для этого заметим, что это неравенство сохранится, если подставить в него $p' = p = g(z^0_{p,r})$, вместо $\beta(p',r')$ взять $f(z^0_{p,r})$ и считать, что $h(z^0_{p,r}) \le r'$. Таким образом, имеем

$$f(z^0_{p,r}) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle \le f(z^0_{p,r}) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r'\rangle + R|r'-r|^2 \ \forall\, r' \in \mathbb{R}^m,\ h(z^0_{p,r}) \le r'$$

или

$$-\langle \zeta_r, r\rangle \le -\langle \zeta_r, r'\rangle + R|r'-r|^2 \ \forall\, r' \in \mathbb{R}^m,\ h(z^0_{p,r}) \le r'$$

или

$$\langle \zeta_r, r'-r\rangle \le R|r'-r|^2 \ \forall\, r' \in \mathbb{R}^m,\ h(z^0_{p,r}) \le r'.$$

Так как $h(z^0_{p,r}) \le r$, то, с учетом произвола r', из последнего неравенства выводим, что, если $h_i(z^0_{p,r}) < r_i$, то $\zeta_{r,i} = 0$, а если $h_i(z^0_{p,r}) = r_i$, то $\zeta_{r,i} \le 0$. Таким образом, мы получили неравенство $\zeta_r \le 0$ и одновременно условие дополняющей нежесткости

$$\zeta_{r,i}(h_i(z^0_{p,r}) - r_i) = 0,\ i = 1,\ldots,m. \tag{2.5}$$

Далее, опять в силу (2.4) можем записать

$$f(z^0_{p,r}) - \langle \zeta_p, g(z^0_{p,r}) - p\rangle \le f(z) - \langle \zeta_p, g(z) - p\rangle - \langle \zeta_r, r'-r\rangle + R\|g(z)-p\|^2 + R|r'-r|^2$$

$$\forall\,(z,r') \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m,\ h(z) \le r',$$

откуда, в силу доказанного условия дополняющей нежесткости, имеем

$$f(z^0_{p,r}) - \langle \zeta_p, g(z^0_{p,r}) - p\rangle - \langle \zeta_r, h(z^0_{p,r}) - r\rangle \le$$

$$f(z) - \langle \zeta_p, g(z)-p\rangle - \langle \zeta_r, r'-r\rangle + R\|g(z)-p\|^2 + R|r'-r|^2 \forall\,(z,r') \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m,\ h(z) \le r',$$

и при $r' = h(z)$

$$\begin{gathered} f(z^0_{p,r}) - \langle \zeta_p, g(z^0_{p,r}) - p\rangle - \langle \zeta_r, h(z^0_{p,r}) - r\rangle \le \\ f(z) - \langle \zeta_p, g(z)-p\rangle - \langle \zeta_r, h(z)-r\rangle + R\|g(z)-p\|^2 + R|h(z)-r|^2 \ \forall\, z \in \mathcal{D}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6), являющееся следствием факта оптимальности элемента $z^0_{p,r}$, представляет собою необходимое условие оптимальности в недифференциальной форме в задаче $(P_{p,r})$. В то же время, из-за штрафного слагаемого $R|h(z)-r|^2$, вообще говоря, исследовать его на «достаточность» представляется затруднительным.

Далее мы получим несколько иное необходимое недифференциальное условие оптимальности элемента $z^0_{p,r}$ в задаче ($P_{p,r}$), в котором также будет участвовать вектор множителей $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r)$ из неравенства (2.6), удовлетворяющий, как уже показано выше, условию неположительности $\zeta_r \le 0$ и условию дополняющей нежесткости (2.5).

Указанное необходимое условие, будет, в отличие от (2.6), представлять собою одновременно и достаточное условие оптимальности в задаче ($P_{p,r}$). При этом по форме оно будет совпадать с «регулярной частью» теоремы 1.1, то есть представлять собою, по сути дела, теорему Куна–Таккера в недифференциальной форме в нелинейной задаче ($P_{p,r}$). Для достижения указанной цели будем использовать модифицированную функцию Лагранжа (см., например, [18]), конструкция которой «жестко завязана» со свойствами проксимального субградиента $\zeta \in \partial^P \beta(p,r)$.

Итак, следуя хорошо известному приему (см., например, [18, с. 165]), приведем задачу на условный экстремум ($P_{p,r}$) к виду эквивалентной задачи с операторными ограничениями типа равенства. Для этого заметим, что задача ($P_{p,r}$) эквивалентна задаче

$$(\widetilde{P}_{p,r}) \qquad f(z) \to \inf, \;\; g(z) = p, \;\; h(z) + y = r, \;\; z \in \mathcal{D} \subset Z, \;\; y \in \mathbb{R}^m_+$$

в том смысле, что элемент $z^0_{p,r} \in \mathcal{D}$ является оптимальным в задаче ($P_{p,r}$) тогда и только тогда, когда пара $(z^0_{p,r}, -(h(z^0_{p,r}) - r))$ является таковой в задаче ($\widetilde{P}_{p,r}$). При этом функции значений задач ($P_{p,r}$) и ($\widetilde{P}_{p,r}$) совпадают. Так как функции значений задач ($P_{p,r}$) и ($\widetilde{P}_{p,r}$) совпадают и $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p,r)$, то мы опять можем записать неравенство (2.4) и заметить, что, без ограничения общности, оптимальным в задаче минимизации

$$\beta(p',r') - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2 \to \min, \;\; (p',r') \in H \times \mathbb{R}^m \tag{2.7}$$

является лишь элемент (p,r) и никакой другой. Отсюда следует, что в задаче минимизации

$$\begin{gathered} f(z) + \langle -\zeta_p, g(z) - p \rangle + \langle -\zeta_r, h(z) + y - r \rangle + \\ R\|g(z) - p\|^2 + R|h(z) + y - r|^2 \to \min, \;\; z \in \mathcal{D}, \;\; y \in \mathbb{R}^m_+ \end{gathered} \tag{2.8}$$

оптимальной является пара $(z^0_{p,r}, -(h(z^0_{p,r}) - r))$, в которой $z^0_{p,r}$ – решение задачи ($P_{p,r}$) (оно может быть не единственным). При этом

$$\begin{gathered} f(z^0_{p,r}) = \beta(p,r) = \min_{(z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m_+} \{ f(z) + \langle -\zeta_p, g(z) - p \rangle + \langle -\zeta_r, h(z) + y - r \rangle + \\ R\|g(z) - p\|^2 + R|h(z) + y - r|^2 \}. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Действительно, предположим, что для некоторой пары $(\bar{z}, \bar{y}) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m_+$

$$f(\bar{z}) + \langle -\zeta_p, g(\bar{z}) - p \rangle + \langle -\zeta_r, h(\bar{z}) + \bar{y} - r \rangle + R\|g(\bar{z}) - p\|^2 + R|h(\bar{z}) + \bar{y} - r|^2 < \beta(p,r),$$

но тогда получаем, что

$$\begin{gathered} \beta(p,r) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle > f(\bar{z}) + \langle -\zeta_p, p' \rangle + \langle -\zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2 \geq \\ \beta(p',r') + \langle -\zeta_p, p' \rangle + \langle -\zeta_r, r' \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2, \end{gathered}$$

где $p' \equiv g(\bar{z})$, $r' \equiv h(\bar{z}) + \bar{y}$, что противоречит оптимальности пары (p,r) в задаче (2.7). Таким образом, можем записать

$$f(z^0_{p,r}) = f(z^0_{p,r}) + \langle -\zeta_p, g(z^0_{p,r}) - p \rangle + \langle -\zeta_r, h(z^0_{p.r}) - (h(z^0_{p,r}) - r) - r \rangle +$$

$$R\|g(z^0_{p,r})-p\|^2+R|h(z^0_{p.r})-(h(z^0_{p,r})-r)-r|^2\le$$
$$f(z)+\langle-\zeta_p,g(z)-p\rangle+\langle-\zeta_r,h(z)+y-r\rangle+R\|g(z)-p\|^2+R|h(z)+y-r|^2\ \forall\,(z,y)\in\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m_+$$

или, так как (см. [18, с. 166, 167]),

$$\min_{(z,y)\in\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m_+}\{f(z)+\langle-\zeta_p,g(z)-p\rangle+\langle-\zeta_r,h(z)+y-r\rangle+$$
$$R\|g(z)-p\|^2+R|h(z)+y-r|^2\}=\min_{z\in\mathcal{D}}\min_{y\in\mathbb{R}^m_+}\{f(z)+\langle-\zeta_p,g(z)-p\rangle+\langle-\zeta_r,h(z)+y-r\rangle+$$
$$R\|g(z)-p\|^2+R|h(z)+y-r|^2\}=\min_{z\in\mathcal{D}}\{f(z)+\langle-\zeta_p,g(z)-p\rangle+R\|g(z)-p\|^2+$$
$$\sum_{i=1}^m\min_{y_i\in\mathbb{R}^1_+}\{-\zeta_{r,i}(h_i(z)+y_i-r_i)+R(h_i(z)+y_i-r_i)^2\}\}=$$
$$\min_{z\in\mathcal{D}}\{f(z)+\langle-\zeta_p,g(z)-p\rangle+R\|g(z)-p\|^2+\frac{1}{4R}\sum_{i=1}^m\{[\max\{0,-\zeta_{r,i}+2R(h_i(z)-r_i)\}]^2-(\zeta_{r,i})^2\}\},$$

получаем

$$f(z^0_{p,r})\le f(z)+\langle-\zeta_p,g(z)-p\rangle+R\|g(z)-p\|^2+ \tag{2.10}$$
$$\frac{1}{4R}\sum_{i=1}^m\{[\max\{0,-\zeta_{r,i}+2R(h_i(z)-r_i)\}]^2-(\zeta_{r,i})^2\}\ \forall\,z\in\mathcal{D}.$$

Определим модифицированную функцию Лагранжа ($\lambda=-\zeta_p,\ \ \mu=-\zeta_r,\ \ c=2R$)

$$L^{P,c}_{p,r}(z,\lambda,\mu)\equiv f(z)+\langle\lambda,g(z)-p\rangle+\frac{c}{2}\|g(z)-p\|^2+\frac{1}{2c}\sum_{i=1}^m\{[\max\{0,\mu_i+c(h_i(z)-r_i)\}]^2-(\mu_i)^2\},$$

где верхний индекс P означает, что конструкция этой функции Лагранжа является следствием непустоты проксимального субградиента $\partial^P\beta(p,r)$. Определенная таким образом функция $L^{P,c}_{p,r}$ совпадает по своей конструкции с известной модифицированной функцией Лагранжа для исходной задачи ($P_{p,r}$) с ограничениями типа равенства и неравенства (подробности см. в [18, с. 167]). Тогда мы можем переписать неравенство (2.10) в терминах модифицированной функции Лагранжа следующим образом

$$L^{P,2R}_{p,r}(z^0_{p,r},-\zeta_p,-\zeta_r)\le L^{P,2R}_{p,r}(z,-\zeta_p,-\zeta_r)\ \ \forall\,z\in\mathcal{D}. \tag{2.11}$$

Здесь было использовано полученное выше условие дополняющей нежесткости (2.5), с учетом которого справедливо равенство

$$f(z^0_{p,r})=L^{P,2R}_{p,r}(z^0_{p,r},-\zeta_p,-\zeta_r). \tag{2.12}$$

Неравенство (2.11) в совокупности с условием неположительности $\zeta_r\le 0$ и условием дополняющей нежесткости (2.5) представляет собою «необходимую часть» недифференциального принципа Лагранжа, а, точнее, теоремы Куна–Таккера (множитель при целевой функции равен единице) в недифференциальной форме в задаче ($P_{p,r}$). Покажем, что неравенство (2.11) в совокупности с этими полученными выше двумя условиями является и достаточным, чтобы точка $z^0_{p,r}\in\mathcal{D}^0_{p,r}$, удовлетворяющая ему, была оптимальной в задаче ($P_{p,r}$). Действительно, пусть некоторый допустимый элемент, обозначаемый через $z^0_{p,r}$, $z^0_{p,r} \in \mathcal{D}^0_{p,r}$, удовлетворяет этому неравенству с $\zeta_r \le 0$ и выполняется указанное условие дополняющей нежесткости. Тогда подставляя произвольное $z \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ в (2.11) и принимая во внимание, что

$$\frac{1}{4R}\sum_{i=1}^{m}\{[\max\{0, -\zeta_{r,i} + 2R(h_i(z) - r_i)\}]^2 - (\zeta_{r,i})^2\}\} \le 0$$

для таких z, можем записать, что $f(z^0_{p,r}) \le f(z)\ \forall\, z \in \mathcal{D}^0_{p,r}$, то есть выделенный указанным образом элемент $z^0_{p,r}$ действительно является оптимальным в задаче ($P_{p,r}$). Наконец, если для некоторых $\zeta_p \in H$, $\zeta_r \in \mathbb{R}^m$, $\zeta_r \le 0$, $\langle \zeta_r, h(z^0_{p,r}) - r\rangle = 0$, выполняется неравенство (2.11), то выполняется равенство (2.12) и неравенство (2.10). Стало быть, рассуждая и далее в «обратном» порядке, выполняется равенство (2.9), то есть в задаче минимизации (2.8) оптимальной является пара $(z^0_{p,r}, -(h(z^0_{p,r}) - r))$, и, как следствие, неравенство (2.4), а также и неравенство (2.3), то есть в силу леммы 2.1 получаем включение $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P\beta(p,r)$. □

Теорема 2.1. [*Модифицированная параметрическая теорема Куна–Таккера в недифференциальной форме в нелинейной задаче на условный экстремум*] *Пусть в задаче ($P_{p,r}$) имеет место равенство $\beta_0(p,r) = \beta(p,r)\ \forall\,(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$ и $(p,r) \in H \times \mathbb{R}^m$ такая точка, что $\beta(p,r) < +\infty$. Тогда справедливо следующее состоящее из двух частей утверждение.*

Если $z^0_{p,r} \in \mathcal{D}^0_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D} :\ g(z) - p = 0,\ h(z) \le r\}$ — оптимальный элемент в задаче $(P_{p,r})$, то есть $f(z^0_{p,r}) = \beta(p,r)$, и $\zeta \in \partial^P\beta(p,r)$, где $\partial^P\beta(p,r)$ — проксимальный субградиент функции значений β, то для множителей Лагранжа $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$, $(\lambda,\mu) = -\zeta$, и некоторого $c > 0$ выполняются соотношения

$$L^{P,c}_{p,r}(z^0_{p,r}, \lambda, \mu) \le L^{P,c}_{p,r}(z, \lambda, \mu)\ \forall\, z \in \mathcal{D},\quad \mu_i(h_i(z^0_{p,r}) - r_i) = 0,\ \ i = 1, \dots, m, \tag{2.13}$$

и при этом $-\zeta = (\lambda,\mu)$ — обобщенный вектор Куна–Таккера задачи $(P_{p,r})$, то есть вектор, удовлетворяющий неравенству $f(z^0_{p,r}) \le L^{P,c}_{p,r}(z,\lambda,\mu)\ \forall\, z \in \mathcal{D}$.

И, наоборот, если $\tilde z \in \mathcal{D}^0_{p,r}$ такой элемент, что при некоторых $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$ выполняются соотношения (2.13) с заменой $z^0_{p,r}$ на $\tilde z$, то этот элемент оптимален в задаче $(P_{p,r})$, то есть $\tilde z = z^0_{p,r}$, пара (λ,μ) является вектором Куна–Таккера для нее и одновременно $(-\lambda,-\mu) \in \partial^P\beta(p,r)$.

2.5. Модифицированная теорема Куна–Таккера в предположении непустоты субдифференциала Фреше. Докажем в данном разделе модифицированную недифференциальную теорему Куна–Таккера для нелинейной задачи на условный экстремум, аналогичную теореме 2.1, но в которой основным предположением, в отличие от этой теоремы, будет предположение непустоты субдифференциала Фреше функции значений. Ради упрощения изложения ограничимся здесь рассмотрением задачи ($P_{p,r}$) предыдущего раздела без ограничений-неравенств, то есть параметрической задачи на условный экстремум в гильбертовом пространстве с операторным ограничением-равенством

$$(P_p) \qquad f(z) \to \min,\ \ g(z) = p,\ \ z \in \mathcal{D} \subset Z.$$

Все условия на исходные данные считаем такими же, как и в предыдущем разделе с естественным учетом того, что в задаче (P_p) отсутствуют ограничения-неравенства. Опять предполагаем для простоты, что имеет место равенство $\beta(p) = \beta_0(p)\ \forall p \in H$. Как и ранее, обозначаем через $z_p^0 \in \mathcal{D}_p^0$ решение задачи (P_p), в случае его существования.

Пусть в задаче (P_p) оптимальный элемент существует и не пуст субдифференциал Фреше $\hat{\partial}^F\beta(p) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \hat{\partial}^F\beta(p)$. Тогда применяя лемму 2.3, можем утверждать, что для любого $R > 0$ найдется $\delta(R) > 0$ (зависящие от точки p и элемента ζ) такие, что

$$\beta(p) - \langle\zeta, p\rangle \le \beta(p') - \langle\zeta, p'\rangle + R\|p' - p\|\ \ \forall p' \in S_{\delta(R)}(p) \equiv \{p' \in H : \|p' - p\| \le \delta(R)\}. \quad (2.14)$$

Из неравенства (2.14) получаем, взяв $g(z)$ в качестве p' и учитывая, что $f(z) \ge \beta(p')$, если $z \in \mathcal{D}$, $g(z) = p'$ и $\|g(z) - p\| \le \delta(R)$,

$$f(z_p^0) - \langle\zeta, g(z_p^0) - p\rangle \le f(z) - \langle\zeta, g(z) - p\rangle + R\|g(z) - p\|\ \ \forall z \in \{x \in \mathcal{D} :\ \|g(x) - p\| \le \delta(R)\}. \quad (2.15)$$

Учитывая ограниченность β и $\operatorname{dom}\beta$ (в силу условий (2.2) и ограниченности $\mathcal{D}$), из неравенства (2.14) одновременно следует, что найдется такое $L > 0$, для которого $\beta(p) - \langle\zeta, p\rangle \le \beta(p') - \langle\zeta, p'\rangle + L\|p' - p\|\ \forall p' \in H$. Из последнего неравенства, в свою очередь, получаем, взяв $g(z)$ в качестве p' и учитывая, что при этом $f(z) \ge \beta(p')$, если $z \in \mathcal{D}$ и $g(z) = p'$

$$f(z_p^0) - \langle\zeta, g(z_p^0) - p\rangle \le f(z) - \langle\zeta, g(z) - p\rangle + L\|g(z) - p\|\ \ \forall z \in \mathcal{D}. \quad (2.16)$$

Как неравенство в (2.15) при условии $\|g(z) - p\| \le \delta(R)$, так и неравенство (2.16) представляют собою необходимые условия оптимальности элемента z_p^0. Для формулировки недифференциального принципа Лагранжа, а, точнее, теоремы Куна–Таккера (множитель при целевой функции равен единице) в недифференциальной форме в задаче (P_p) осталось показать, что неравенство (2.16) является и достаточным условием для того, чтобы точка z_p^0, удовлетворяющая ему, была оптимальной в задаче (P_p). Действительно, пусть некоторый допустимый элемент, обозначаемый через z_p^0, $z_p^0 \in \mathcal{D}_p^0$, удовлетворяет этому неравенству. Тогда рассматриваем $z \in \mathcal{D}$ такие, что $g(z) = p$. Подставляя такие z в (2.16), можем записать, что $f(z_p^0) \le f(z)\ \forall z \in \mathcal{D}_p^0$, то есть выделенный указанным образом элемент z_p^0 действительно является оптимальным в задаче (P_p). Если же, одновременно, для любого $R > 0$ найдется такое $\delta(R) > 0$, что выполняются соотношения (2.15), то рассуждая в обратном порядке, можно заметить, что выполняются и соотношения (2.14), что, в силу леммы 2.3, означает справедливость включения $\zeta \in \hat{\partial}^F\beta(p)$. Определим модифицированную функцию Лагранжа ($\lambda = -\zeta$, $c = R$)

$$L_p^{F,c}(z, \lambda) \equiv f(z) + \langle\lambda, g(z) - p\rangle + c\|g(z) - p\|,$$

где верхний индекс F означает, что ее конструкция является следствием непустоты субдифференциала Фреше $\hat{\partial}^F\beta(p)$. Тогда следствием проведенных рассуждений является

Теорема 2.2. [*Модифицированная параметрическая теорема Куна–Таккера в недифференциальной форме в нелинейной задаче на условный экстремум*] *Пусть в задаче* (P_p) $\beta_0(p) = \beta(p)\ \forall\, p \in H$ *и* $p \in H$ *такая точка, что* $\beta(p) < +\infty$. *Тогда справедливо следующее состоящее из двух частей утверждение.*

Если $z_p^0 \in \mathcal{D}_p^0 \equiv \{z \in \mathcal{D}:\ g(z) - p = 0\}$ *— оптимальный элемент в задаче* (P_p), *то есть* $f(z_p^0) = \beta(p)$, *и* $\zeta \in \hat{\partial}^F \beta(p)$, *где* $\hat{\partial}^F \beta(p)$ *— субдифференциал Фреше функции значений* β, *то для множителя Лагранжа* $\lambda \in H$, $\lambda = -\zeta$, *и любого* $R > 0$ *существует* $\delta(R) > 0$ *такое, что выполняется неравенство*

$$L_p^{F,R}(z_p^0, \lambda) \le L_p^{F,R}(z, \lambda)\ \forall\, z \in \{x \in \mathcal{D}:\ \ \|g(x) - p\| \le \delta(R)\}, \tag{2.17}$$

следствием которого является неравенство

$$L_p^{F,c}(z_p^0, \lambda) \le L_p^{F,c}(z, \lambda)\ \forall\, z \in \mathcal{D} \tag{2.18}$$

при некотором $c > 0$. *При этом* $-\zeta = \lambda$ *— обобщенный вектор Куна–Таккера задачи* (P_p), *то есть вектор, удовлетворяющий неравенству* $f(z_p^0) \le L_p^{F,c}(z, \lambda)\ \forall\, z \in \mathcal{D}$.

И, наоборот, если $\tilde{z} \in \mathcal{D}_p^0$ *такой элемент, что при некотором* $\lambda \in H$ *выполняются соотношения* (2.18) *с заменой* z_p^0 *на* $\tilde{z}$, *то этот элемент оптимален в задаче* (P_p), *то есть* $\tilde{z} = z_p^0$, *а элемент* λ *является вектором Куна–Таккера для нее. Если же для любого* $R > 0$ *существует* $\delta(R) > 0$ *такое, что выполняются и соотношения* (2.17), *то* $-\lambda \in \hat{\partial}^F \beta(p)$.

References

[1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.:V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirovv, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1987.

[2] Е. С. Левитин, *Теория возмущений в математическом программировании и приложения*, Наука, М., 1992. [E. S. Levitin, *Teoriya Vozmushchenii v Matematicheskom Programmirovanii i Prilozheniya*, Nauka Publ., Moscow, 1992 (In Russian)].

[3] А. Ф. Измаилов, *Чувствительность в оптимизации*, Физматлит, М., 2006. [A. F. Izmailov, *Chuvstvitelnost v Optimizatsii*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].

[4] Ж. -П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988; англ. пер.:J. -P. Aubin, *L'analyse Non Lineaire et ses Motivations Economiques*, Masson, Paris-New York, 1984.

[5] P. D. Loewen, *CRM Proceedings and Lecture Notes*. V. 2: *Optimal Control via Nonsmooth Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[6] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988; англ. пер.:F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, A Wiley–Interscience Publication John Wiley and Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1983.

[7] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic theory; II: Applications*, Springer, Berlin, 2006.

[8] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory. Graduate Texts in Mathematics*. V. 178, Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] М. И. Сумин, “Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.:M. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.

[10] М. И. Сумин, “Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:1 (2014), 25–49; англ. пер.:M. I. Sumin, “Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:1 (2014), 22–44.

[11] М. И. Сумин, “Устойчивая секвенциальная теорема Куна-Таккера в итерационной форме или регуляризованный алгоритм Удзавы в регулярной задаче нелинейного программирования”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55**:6 (2015), 947–977; англ. пер.:M. I. Sumin, “Stable sequential Kuhn–Tucker theorem in iterative form or a regularized Uzawa algorithm in a regular nonlinear programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **55**:6 (2015), 935–961.

[12] М. И. Сумин, “Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она дает”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:4(124) (2018), 757–775. [M. I. Sumin, “Why regularization of Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is needed and what it gives”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:4(124) (2018), 757–775 (In Russian)].

[13] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25**:1 (2019), 279–296 (In Russian)].

[14] Е. Г. Гольштейн, *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Наука, М., 1971. [E. G. Golshtein, *Teoriya Dvoistvennosti v Matematicheskom Programmirovanii i ee Prilozheniya*, Nauka, M., 1971 (In Russian)].

[15] М. И. Сумин, *Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород, 2009. [M. I. Sumin, *Nekorrektnye Zadachi i Metody ikh Resheniya. Materialy k Lektsiyam dlya Studentov Starshikh Kursov*, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, 2009 (In Russian)].

[16] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: В 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil’ev, *Metody Optimizatsii: V 2-kh. kn.*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].

[17] А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров, *Курс методов оптимизации*, Наука, М., 1986. [A. G. Sukharev, A. V. Timokhov, V. V. Fedorov, *Kurs Metodov Optimizatsii*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[18] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, 1-е изд., Радио и связь, М., 1987; англ. пер.:D. -P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York-London-Paris-San Diego-SanFrancisco-Sao Paulo-Sydney-Tokyo-Toronto, 1982.

Информация об авторе

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru

Information about the author

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 03.06.2020
Поступила после рецензирования 17.08.2020
Принята к публикации 09.09.2020

Received 03.06.2020
Reviewed 17.08.2020
Accepted for press 09.09.2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 131 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-331-340
UDC 517.958+517.98

Scaling invariance of the strict KP hierarchy

Gerard F. HELMINCK[1], **Elena A. PANASENKO**[2]
[1] KdV Institute, University of Amsterdam
904 Science Park, Amsterdam, 1098 XH, the Netherlands
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Масштабная инвариантность строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили

Герард Франциск ХЕЛЬМИНК[1], **Елена Александровна ПАНАСЕНКО**[2]
[1] Математический институт Кортевега–де Фриза, Университет г. Амстердам
1098 XH, Нидерланды, г. Амстердам, Сайенс Парк, 904
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Abstract. In this paper we show first of all that for solutions of the strict KP hierarchy it is sufficient to work in a standard setting. Further we discuss a minimal realization of the hierarchy and present the scaling invariance of the Lax equations of the hierarchy.

Keywords: pseudo differential operators; Lax equations; strict KP hierarchy, minimal realization; scaling transformations

For citation: Helminck G.F., Panasenko E.A. Masshtabnaya invariantnost' strogoy iyerarkhii Kadomtseva–Petviashvili [Scaling invariance of the strict KP hierarchy]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 131, pp. 331–340. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-331-340.

Аннотация. В работе показано, прежде всего, что для решений строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) достаточно использовать стандартное окружение. Далее рассмотрена минимальная реализация этой иерархии, представлена масштабная инвариантность уравнений Лакса строгой иерархии КП.

Ключевые слова: псевдодифференциальные операторы; уравнения Лакса; строгая иерархия КП; минимальная реализация; преобразования масштабирования

Для цитирования: *Хельминк Г.Ф., Панасенко Е.А.* Масштабная инвариантность строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 131. С. 331–340. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-131-331-340. (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

The main goal of this paper is to present the scaling transformations that map solutions of the strict KP hierarchy from one setting to another one. Besides that we also show that as far as solutions are concerned, it is sufficient to consider standard settings. We illustrate the scaling invariance at the hand of the Khadomtsev–Petviashvilii (KP) equation from plasma physics [1]. This nonlinear equation for a function $u = u(x, y, t)$ is a two-dimensional variant of the KdV equation and reads

$$\frac{3}{4}u_{yy} := \frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = (u_t - \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{2}uu_x)_x.$$

The numerical coefficients of the various terms in the KP equation are not so relevant. Consider namely the following transformation of the dependent and independent variables

$$\hat{x} = \alpha_1 x, \hat{y} = \alpha_2 y, \hat{t} = \alpha_3 t, u = \beta\hat{u}, \text{ with } \alpha_1 \neq 0, \alpha_3 \neq 0 \text{ and } \beta \neq 0. \tag{0.1}$$

Then a direct computation shows that the KP equation in the new coordinates becomes

$$\frac{3}{4}\beta\alpha_2^2\hat{u}_{\hat{y}\hat{y}} = \alpha_1(\beta\alpha_3\hat{u}_{\hat{t}} - \frac{1}{4}\alpha_1^3\beta\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}} - \frac{3}{2}\alpha_1\beta^2\hat{u}\hat{u}_{\hat{x}})_{\hat{x}}$$

and this illustrates the wide range of coefficients that can be obtained. We call transformations as described in formula (0.1), where the dependent and independent variables change by a constant nonzero factor *scaling transformations*. Note that the choice $\beta = \alpha_2 = \alpha_1^2$ and $\alpha_3 = \alpha_1^3$ transforms a solution of the KP equation in the old coordinates to a solution in the new. The equations of the strict KP hierarchy also possess a scaling invariance which can conveniently be shown with the help of the minimal realization of the equations presented here. The contents of the various sections is as follows: Section 1. describes the necessary prerequisites of the strict KP hierarchy. The next section treats the standartization of the notion of setting and the last section presents the minimal realization of the hierarchy and its scaling invariance.

1. The strict KP hierarchy

In this section we shortly recall the results needed from [2] about the strict KP-hierarchy in the pseudo differential operators Psd. The algebra Psd is built up as follows: one starts with a commutative algebra R over a field k of characteristic zero and a privileged k-linear derivation $\partial : R \mapsto R$. Given R and ∂, one forms the algebra $R[\partial]$ of differential operators in ∂ with coefficients from R. It consists of k-linear endomorphisms of R of the form $\sum_{i=0}^{n} a_i\partial^i, a_i \in R$. For simplicity, we assume that the powers of ∂ are R-linear independent, otherwise one has to pass to a cover of $R[\partial]$ [3]. Next one extends the algebra $R[\partial]$ by adding the inverses of all the powers of ∂ and by allowing infinite sums of these negative powers. Thus one arrives at the algebra Psd$= R[\partial, \partial^{-1})$ of all formal series

$$p = \sum_{j=-\infty}^{N} p_j\partial^j, p_j \in R.$$

If one uses for each $n \in \mathbb{Z}$, the notation

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},$$

then the product of two series $a = \sum_j a_j \partial^j$ and $b = \sum_i b_i \partial^i$ is given by

$$ab := \sum_j \sum_i \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j}{s} a_j \partial^s(b_i)\partial^{i+j-s}.$$

The algebra Psd possesses various decompositions. For $s \in \mathbb{Z}$, any pseudo differential operator $P = \sum_j p_j \partial^j \in$ Psd can be split as

$$P = P_{>s} + P_{\leqslant s}, \text{ where } P_{>s} = \sum_{j>s} p_j \partial^j \text{ and } P_{\leqslant s} = \sum_{j \leqslant s} p_j \partial^j. \tag{1.1}$$

For $s = 0$, this corresponds to writing P as the sum of its pure differential operator part $P_{>0}$ and its integral operator part $P_{\leqslant 0}$. This decomposition is important for the strict KP hierarchy, the one for $s = -1$ for the KP hierarchy.

As any associative k-algebra, also Psd is w.r.t. the commutator a Lie algebra over k. From the multiplication rules in Psd follows that for $s = 0$ the decomposition (1.1) yields a splitting of the Lie algebra Psd into the direct sum of two Lie subalgebras, namely

$$\text{Psd} = \{P \in \text{Psd}, P = P_{\leqslant 0}\} \oplus \{P \in \text{Psd}, P = P_{>0}\} := \text{Psd}_{\leqslant 0} \oplus \text{Psd}_{>0}.$$

We write $\pi_{>0}$ for the projection from Psd on $\text{Psd}_{>0}$ consisting of taking the strict differential operator part of an element in Psd. Similarly, one defines the projections of Psd on respectively $\text{Psd}_{\leqslant 0}$, $\text{Psd}_{>-1}$ and $\text{Psd}_{\leqslant -1}$, by respectively $\pi_{\leqslant 0}$, $\pi_{>0}$ and $\pi_{<0}$. To the Lie algebra $\text{Psd}_{\leqslant 0}$ we associated the group

$$D(0) = \{p_0 + \sum_{j<0} p_j \partial^j \mid p_0 \in R^*\}.$$

Inside Psd we consider perturbations M of the basic derivation ∂ that have the form

$$M = \partial + \sum_{j=0}^{\infty} m_{j+1} \partial^{-j}. \tag{1.2}$$

They are prototypes of deforming the operator ∂ by conjugating or *dressing* with an element from $D(0)$.

Let $k[\partial]_0$ be the $\{\sum_{i=1}^N a_i \partial^i \mid \text{ all } a_i \in k\}$. Then $k[\partial]_0$ is a commutative Lie subalgebra of $\text{Psd}_{>0}$ and we see $k[M]_0 = \{\sum_{i=1}^N a_i M^i \mid \text{ all } a_i \in k\}$ as a commutative deformation of $k[\partial]_0$. Now one searches for deformations $\{M^m, m \geqslant 1\}$ of the elements $\{\partial^m\}$ such that their evolution is given by Lax equations whose form is determined by the projection $\pi_{>0}$. More concretely, we assume for the deformations $\{M^m\}$ that the k-algebra R is, besides with a privileged k-linear derivation ∂, also equipped with a collection $\{\partial_r \mid r \geqslant 1\}$ of k-linear derivations of R commuting with ∂, that form the infinitesimal generators of the various flows of the evolution. The Lax equations each M^m should satisfy are

$$\partial_r(M^m) = [M^m, \pi_{\leqslant 0}(M^r)] = [\pi_{>0}(M^r), M^m] = [C_r, M^m], \text{ for all } r \geqslant 1,$$

where C_r is a short hand notation for $\pi_{>0}(M^r)$. Since ∂_r and taking the commutator with C_r are both derivations of Psd, one sees that it suffices to find an M such that

$$\partial_r(M) = [C_r, M] = [M, \pi_{\leqslant 0}(M^r)]. \tag{1.3}$$

The equations (1.3) for an operator M in Psd of the form (1.2), are called the *Lax equations of the strict KP hierarchy* and M is named a *solution* of the hierarchy. The data $(R,\, \partial,\, \{\partial_r\})$ are called a *setting* for this nonlinear system.

R e m a r k 1.1. Note that any setting for the strict KP hierarchy admits the *trivial solution* $M = \partial$. Since $C_1 = \partial$ for any M, the Lax equation for $r = 1$ becomes

$$\partial_1(M) = \partial(M).$$

Hence, one often takes $\partial = \partial_1$ and if moreover all the $\{\partial_r\}$ commute among each other, we call the setting $(R,\, \partial_1,\, \{\partial_r\})$ *standard* and use the notation $(R,\, \{\partial_r\})$. Both at the solvability of the related Cauchy problem in [4] and at the geometric construction of solutions of the strict KP hierarchy in [5], we only worked with standard settings. The next section shows that this is sufficient.

R e m a r k 1.2. Let M be a solution of the strict KP hierarchy. We denote the differential subalgebra of R generated by the coefficients of M by $R(M)$. It consists of all polynomial expressions in the $\{\partial^s(m_{j+1}) \mid j \geqslant 0, s \geqslant 0\}$. The derivation ∂ is clearly an endomorphism of $R(M)$ and for simplicity we denote the restriction of ∂ to $R(M)$ by ∂_M. From the fact that all coefficients of the $\{C_r\}$ belong to $R(M)$, one sees that also all the derivations $\{\partial_r\}$ are mapping $R(M)$ into itself. The restriction of each ∂_r to $R(M)$ is similarly denoted by $\partial_{r,M}$. In particular, it follows from Remark 1.1 that $\partial_M = \partial_{1,M}$. The data $(R(M), \partial_M, \{\partial_{r,M}\})$ form then a setting for the strict KP hierarchy and M is a solution in this setting.

R e m a r k 1.3. The independent and dependent variables relevant for the strict KP hierarchy are the flow parameters of the derivations $\{\partial_r\}$ and ∂ from the setting and the $\{m_{j+1} \mid j \geqslant 0\}$. Because the action of ∂ and ∂_1 on M is the same, we will consider in the sequel scaling transformations of the form

$$\partial = \alpha_1 \hat{\partial}, \partial_r = \alpha_r \hat{\partial}_r, m_{j+1} = \beta_j \hat{m}_{j+1}, \tag{1.4}$$

with $\{\alpha_r \in \mathbb{C}^* \mid r \geqslant 1\}$ and $\{\beta_j \in \mathbb{C}^* \mid j \geqslant 0\}$. They link with the setting $(R, \hat{\partial}, \{\hat{\partial}_r\})$ for the strict KP hierarchy.

2. Reduction to a standard setting

We want to show in this section that, given a setting $(R,\, \partial_1,\, \{\partial_r\})$ of the strict KP hierarchy, there is a k-subalgebra R_1 of R such that $\partial|R_1$ and all the $\{\partial_r|R_1\}$ are derivations of R_1 and the setting $(R_1,\, \partial|R_1,\, \{\partial_r|R_1\})$ is standard. To do that we need another form of the strict KP hierarchy. It was shown in [2] that the strict differential operators $\{C_r\}$ in Psd corresponding to a solution M of the strict KP-hierarchy, satisfy

$$\partial_{r_1}(C_{r_2}) - \partial_{r_2}(C_{r_1}) - [C_{r_1}, C_{r_2}] = 0. \tag{2.1}$$

We call the equations (2.1) the *zero curvature relations* for the strict cut-off's $\{C_r\}$ of the solution M of the strict KP-hierarchy. The zero curvature relations are also sufficient to get the Lax equations for M, for there holds

Theorem 2.1. *Let $(R, \partial, \{\partial_r\})$ be a setting for the strict KP hierarchy and let M be an element in Psd of the form (1.2). Then M satisfies the Lax equations of the strict KP hierarchy if and only if the zero curvature relations (2.1) for the $\{C_r \mid r \geqslant 1\}$ hold.*

By using this zero curvature form of the strict KP hierarchy, we can make an important step towards the realization of our goal. For there holds

Proposition 2.1. *The setting $(R(M), \partial_M, \{\partial_{r,M}\})$ is standard.*

Proof. We already saw in Remark 1.2 that $\partial_M = \partial_{1,M}$, so we merely have to show that the derivations $\{\partial_{r,M}\}$ commute. Note that if a and b are in $R(M)$, then there hold for all $r_1 \geqslant 1$ and $r_2 \geqslant 1$ the identities

$$\partial_{r_1}\partial_{r_2}(ab) = \partial_{r_1}\partial_{r_2}(a)b + \partial_{r_2}(a)\partial_{r_1}(b) + \partial_{r_1}(a)\partial_{r_2}(b) + a\partial_{r_1}\partial_{r_2}(b),$$
$$\partial_{r_2}\partial_{r_1}(ab) = \partial_{r_2}\partial_{r_1}(a)b + \partial_{r_1}(a)\partial_{r_2}(b) + \partial_{r_2}(a)\partial_{r_1}(b) + a\partial_{r_2}\partial_{r_1}(b).$$

Hence, if a and b are in the kernel of the commutator of ∂_{r_1} and ∂_{r_2}, then their product also belongs to this kernel. The algebra $R(M)$ is the polynomial algebra generated by the $\{\partial^s(m_{j+1}) \mid j \geqslant 0, s \geqslant 0\}$ so it suffices to show that their actions on these elements commute. Further, all the $\{\partial_{r,M}\}$ commute with ∂_M and that reduces the problem to demonstrating for all $r_1 \geqslant 1$ and $r_2 \geqslant 1$ that

$$\partial_{r_1}\partial_{r_2}(M) - \partial_{r_2}\partial_{r_1}(M) = 0. \tag{2.2}$$

Using the Lax equations for M we get

$$\partial_{r_1}\partial_{r_2}(M) = \partial_{r_1}([C_{r_2}, M]) = [\partial_{r_1}(C_{r_2}), M] + [C_{r_2}, [C_{r_1}, M]]$$

and likewise

$$\partial_{r_2}\partial_{r_1}(M) = [\partial_{r_2}(C_{r_1}), M] + [C_{r_1}, [C_{r_2}, M]].$$

Since $\mathrm{ad}([C_{r_1}, C_{r_2}]) = [\mathrm{ad}(C_{r_1}), \mathrm{ad}(C_{r_2})]$ we see that the left hand side of equation (2.2) is equal to

$$[\partial_{r_1}(C_{r_2}) - \partial_{r_2}(C_{r_1}) - [C_{r_1}, C_{r_2}], M]$$

and, because M is a solution of the strict KP hierarchy, the left component of this commutator is zero by Theorem 2.1. This proves the statement in the proposition.

Let R_{sol} be the subalgebra of R consisting of the polynomial expressions in the $\{\partial^s(m_{j+1})\}$ for all solutions $M = \partial + \sum_{j=0}^{\infty} m_{j+1}\partial^{-j}$ of the strict KP hierarchy in the setting $(R, \partial, \{\partial_r\})$. R_{sol} is exactly the subalgebra of R that is of interest for finding solutions of this hierarchy. The derivations ∂ and ∂_1 are equal on R_{sol}, all the $\{\partial_r\}$ map R_{sol} to itself and it follows by the same argument as in the proof of Proposition 2.1 that all the $\{\partial_r\}$ commute on R_{sol}. Hence, by restricting R to R_{sol} one does not loose relevance for the strict KP hierarchy and the setting becomes standard. So we have

Theorem 2.2. *The setting* $(R_{sol}, \partial|R_{sol}, \{\partial_r|R_{sol}\})$ *is standard.*

One advantage of a standard setting is that it allows another characterization of the equations of the hierarchy. Note thereto first of all that there is associated to a solution M of the strict KP-hierarchy still another set of pseudo differential operators that satisfy zero curvature relations. For, if we write for each $r \geqslant 1$

$$D_r := -(M^r)_{\leqslant 0},$$

then we know that there hold respectively the Lax equations

$$\partial_r(M) = [C_r, M] = [D_r, M]$$

and in that light it is not surprising that the collection $\{D_r\}$ satisfies

$$\partial_{r_1}(D_{r_2}) - \partial_{r_2}(D_{r_1}) - [D_{r_1}, D_{r_2}] = 0.$$

To show this, one takes the zero curvature equations for the $\{C_r\}$, one substitutes $C_r = M^r + D_r$ and uses the Lax equations for the relevant powers of M. This yields

$$\begin{aligned}
&\partial_{r_1}(D_{r_2} + M^{r_2}) - \partial_{r_2}(D_{r_1} + M^{r_1}) - [D_{r_1} + M^{r_1}, D_{r_2} + M^{r_2}] = \\
&\partial_{r_1}(D_{r_2}) - \partial_{r_2}(D_{r_1}) + \partial_{r_1}(M^{r_2}) - [D_{r_1}, M^{r_2}] - \partial_{r_2}(M^{r_1}) - [M^{r_1}, D_{r_2}] - [D_{r_1}, D_{r_2}] = \\
&\partial_{r_1}(D_{r_2}) - \partial_{r_2}(D_{r_1}) - [D_{r_1}, D_{r_2}] = 0.
\end{aligned}$$

In a standard setting there holds also the reverse of the statement

Theorem 2.3. *Let* M *be a candidate solution to the strict KP-hierarchy in a standard setting. Then there holds that* M *is a solution of the strict KP-hierarchy if and only if all the* $\{D_r\}$ *satisfy the zero curvature equations*

P r o o f. For each $P \in$ Psd, we have $\partial(P) = [\partial, P]$. Hence, in a standard setting we have $\partial_1(P) = [\partial, P]$. Now we only need to show still that the zero curvature equations are sufficient. Thereto we use these equations for the case $r_1 = 1$ respectively $r_2 = r$ and we substitute $D_1 = \partial - M$. This yields

$$\begin{aligned}
&\partial_1(D_r) - \partial_r(\partial - M) - [\partial - M, D_r] = \\
&\partial_1(D_r) - [\partial, D_r] + \partial_r(M) + [M, D_r] = \partial_r(M) - [D_r, M] = 0,
\end{aligned}$$

which are the Lax equations one is looking for. This proofs the result.

3. A minimal realization and scaling invariance

In this section we want to discuss a minimal realization of the equations (1.3) in the sense that there are a minimal number of relations between the coefficients of the potential solution M and their derivatives w.r.t. ∂. Therefore we start with a proper complex coefficient algebra $\tilde{R}$ and a privileged k-linear derivation $\tilde{\partial}$ of $\tilde{R}$. Keep in mind that any k-linear derivation Δ of a polynomial ring $k[x_s, s \in S]$ in any number of variables S, is determined uniquely by prescribing the images $\Delta(x_s)$ of all the $\{x_s\}$ thanks to the derivation property

$$\Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g), \text{ for all } f \text{ and } g \in k[x_s].$$

Moreover, one can choose the $\Delta(x_s)$ arbitrarily. This brings us to the choice

$$\tilde{R} := k[\tilde{m}_{j+1}^{(s)} \mid j \geqslant 0, s \geqslant 0]$$

of all polynomials in the unknown $\{\tilde{m}_{j+1}^{(s)} \mid j \geqslant 0, s \geqslant 0\}$ with coefficients from k and the k-linear derivation $\tilde{\partial}$ of $\tilde{R}$ defined by

$$\tilde{\partial}(\tilde{m}_{j+1}^{(s)}) := \tilde{m}_{j+1}^{(s+1)}, \text{ all } j, j \geqslant 0, \text{ all } s \geqslant 0.$$

It is convenient to put a multiplicative grading on the monomials in the unknown of $\tilde{R}$, according to the prescription on their building blocks

$$\deg(\tilde{m}_{j+1}^{(s)}) = j + 1 + s$$

and that gives a decomposition

$$\tilde{R} = \oplus_{s \geqslant 0} \tilde{R}^{(s)}, \text{ where } \tilde{R}^{(s)} \text{ is the span of the monomials of degree } s.$$

Then $\tilde{\partial}$ is a k-linear map of order one w.r.t. the grading and hence each k-linear map $r\tilde{\partial}^m, m \geqslant 0$, with r a homogeneous element of degree p in $\tilde{R}$, maps $\tilde{R}^{(s)}$ to $\tilde{R}^{(s+p+m)}$. Using this property, it is a straightforward verification that the pair $(\tilde{R}, \tilde{\partial})$ is a proper starting point in the sense that

Lemma 3.1. *The action of $\tilde{R}[\tilde{\partial}]$ on $\tilde{R}$ is faithful.*

The grading on $\tilde{R}$ extends to a grading on $\tilde{R}[\tilde{\partial}]$ by assigning the order $m + p$ to the $\mathbb{C}$-linear maps $r\tilde{\partial}^m, r \in \tilde{R}^{(p)}$. Likewise, we can call an element P of $\tilde{R}[\tilde{\partial}, \tilde{\partial}^{-1})$ *homogeneous of degree* m, if P can be written as

$$P = \sum_{i \leqslant N} p_{m-i} \tilde{\partial}^i, \text{ with all } p_{m-i} \in \tilde{R}^{(m-i)}.$$

The multiplication rules in $\tilde{R}[\tilde{\partial}, \tilde{\partial}^{-1})$ are such that the product of two homogeneous elements of degrees m_1 resp. m_2 yields a homogeneous element of degree $m_1 + m_2$. This implies that all strict cut-off's $\tilde{C}_i := (\tilde{M}^i)_{>0}, i \geqslant 1$, are homogeneous as well. Note that $\tilde{C}_1 = \tilde{\partial}$. Next we try to find k-linear derivations $\{\tilde{\partial}_i \mid i \geqslant 1\}$ of $\tilde{R}$ that all commute with $\tilde{\partial}$ and such that $\tilde{M}$ becomes for the setting $(\tilde{R}, \tilde{\partial}, \{\tilde{\partial}_i\})$ a solution of the Lax equations (1.3). Since they have to commute with $\tilde{\partial}$, there has to hold for all $r \geqslant 1$, all $s \geqslant 0$ and all $j, j \geqslant 0$ that

$$\tilde{\partial}_r(\tilde{m}_{j+1}^{(s)}) = \tilde{\partial}^s(\tilde{\partial}_r(\tilde{m}_{j+1}^{(0)})),$$

so that one merely has to prescribe the action of the derivation $\tilde{\partial}_r$ on the set of coefficients $\{\tilde{m}_{j+1}^{(0)}) \mid j \geqslant 0\}$ of the differential operator $\tilde{M}$. Keeping our goal in mind, we have to define the action of $\tilde{\partial}_r$ on $\tilde{M}$ by

$$\tilde{\partial}_r(\tilde{M}) := [\tilde{C}_r, \tilde{M}]. \tag{3.1}$$

In this way $\tilde{M}$ becomes by definition a solution of the strict KP hierarchy w.r.t. the setting $(\tilde{R}, \tilde{\partial}, \{\tilde{\partial}_r\})$ and $\tilde{M}$ together with the setting $(\tilde{R}, \tilde{\partial}, \{\tilde{\partial}_r\})$ we call a *minimal realization of* *the strict KP hierarchy.* Note that, since $\tilde{R} = \tilde{R}(\tilde{M})$ the setting $(\tilde{R}, \tilde{\partial}, \{\tilde{\partial}_r\})$ is standard by Proposition 2.1.

Next we describe in an algebraic way how other realizations of solutions of the strict KP hierarchy are related to this minimal realization. Consider any setting $(R,\ \partial,\ \{\partial_r\})$ for this hierarchy and a potential solution $M \in R[\partial, \partial^{-1})$ of the form (1.2). Each pseudo differential operator M determines uniquely a k-algebra morphism

$$i_M : \tilde{R} \to R$$

by the prescription

$$i_M(\tilde{m}_{j+1}^{(s)}) = \partial^s(m_{j+1})$$

and this k-algebra morphism satisfies by definition

$$i_M \circ \tilde{\partial} = \partial \circ i_M. \tag{3.2}$$

The map i_M extends to a k-algebra morphism from the pseudo differential operators $\tilde{R}[\tilde{\partial}, \tilde{\partial}^{-1})$ to $R[\partial, \partial^{-1})$ such that

$$i_M(\tilde{M}) = M \text{ and } i_M(\tilde{C}_r) = C_r.$$

Assume now that M is a solution of the Lax equations of the strict n-KdV hierarchy, then we have for all $r \geqslant 1$ that

$$\begin{aligned} \partial_r(M) = \partial_r \circ i_M(\tilde{M}) = [C_r, M] = [i_M(\tilde{C}_r), i_M(\tilde{M})] = \\ = i_M([\tilde{C}_r, \tilde{M}]) = i_M \circ \tilde{\partial}_r(\tilde{M}) \end{aligned}$$

Thus the k-linear maps $\partial_r \circ i_M$ and $i_M \circ \tilde{\partial}_r$ are equal on the coefficients of $\tilde{M}$, but, because of relation (3.2) and the fact that the derivations $\{\partial_r\}$ commute with ∂, we get on $\tilde{R}[\tilde{\partial}, \tilde{\partial}^{-1})$ the compatibilities

$$\partial_r \circ i_M = i_M \circ \tilde{\partial}_r, \text{ for all } r \geqslant 1. \tag{3.3}$$

On the other hand, if the compatibilities (3.3) hold for the map i_M, then one applies these identities to $\tilde{M}$ and, as i_M is a k-algebra morphism, we obtain the Lax equations for M. So we may conclude

Lemma 3.2. *The relations* (3.3) *for the map* i_M *are equivalent to* M *being a solution of the strict KP hierarchy w.r.t. the setting* $(\mathrm{R},\ \partial,\ \{\partial_\mathrm{r}\})$.

Next we discuss the effect of the scaling transformations (1.4) in $\tilde{R}[\tilde{\partial}]$. Thereto we first make the substitutions

$$\tilde{\partial} = \alpha_1 \hat{\tilde{\partial}} \text{ and } \tilde{m}_{j+1} = \beta_j \hat{\tilde{m}}_{j+1}.$$

If $\hat{\tilde{R}} = k[\hat{\tilde{m}}_{j+1}^{(s)} \mid j \geqslant 0, s \geqslant 0]$ with $\hat{\tilde{m}}_{j+1}^{(s)} = (\hat{\tilde{\partial}})^s(\hat{\tilde{m}}_{j+1})$, then $\hat{\tilde{R}} = R$ and this substitution determines an isomorphism between $\tilde{R}[\tilde{\partial}, \tilde{\partial}^{-1})$ and $\hat{\tilde{R}}[\hat{\tilde{\partial}}, \hat{\tilde{\partial}}^{-1})$. The element $\tilde{M}$ expresses as follows in $\hat{\tilde{R}}[\hat{\tilde{\partial}}, \hat{\tilde{\partial}}^{-1})$

$$\tilde{M} = \alpha_1(\hat{\tilde{\partial}}) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \alpha_1^{-j} \hat{\tilde{m}}_{j+1} (\hat{\tilde{\partial}})^{-j}.$$

Hence, if we take from now on $\beta_j = \alpha_1^{j+1}$ for all $j \geqslant 0$, then $\tilde{M} = \alpha_1 \hat{\tilde{M}}$ with $\hat{\tilde{M}} = (\hat{\tilde{\partial}}) + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\tilde{m}}_{j+1}(\hat{\tilde{\partial}})^j$ of the form (1.2). So, we get $\tilde{C}_r = \alpha_1^r \hat{\tilde{C}}_r = \alpha_1^r (\hat{\tilde{M}}^r)_{>0}$ for all $r \geqslant 1$. Hence, under the present scaling transformation the Lax equations for $\tilde{M}$ become

$$\tilde{\partial}_r(\tilde{M}) = \alpha_r \alpha_1 \hat{\tilde{\partial}}_r(\hat{\tilde{M}}) = [\tilde{C}_r, \tilde{M}] = \alpha_1^{1+r}[\hat{\tilde{C}}_r, \hat{\tilde{M}}]. \tag{3.4}$$

If we choose, moreover, all $\alpha_r = \alpha_1^r$, then the equations (3.4) show that $\hat{\tilde{M}}$ is a solution of the strict KP hierarchy in the setting $(\hat{\tilde{R}}, \hat{\tilde{\partial}}, \hat{\tilde{\partial}}_r)$. Combining the considerations above leads to the following scaling invariance for solutions of the strict KP hierarchy

Theorem 3.1. *Let M solve the strict KP hierarchy in the setting $(R, \partial, \{\partial_r\})$. For $\alpha \in \mathbb{C}^*$, we consider the scaling transformation (1.4) with $\alpha_r = \alpha^r$, $r \geqslant 1$ and $\beta_j = \alpha^{j+1}$, $j \geqslant 0$. Then substitution of this transformation into M yields an $\hat{M} = \alpha^{-1}M$ in $R[\hat{\partial}, \hat{\partial}^{-1})$ that is a solution of the strict KP hierarchy in the setting $(R, \hat{\partial}, \{\hat{\partial}_r\})$. Hence, if the flow parameters in the original setting were $s = \{s_r\}$, then in the new setting $(R, \hat{\partial}, \{\hat{\partial}_r\})$ the flow parameters become the $\hat{s} = \{\hat{s}_r = \alpha^{-r} s_r\}$.*

R e m a r k 3.1. The scaling invariance of the strict KP hierarchy, as described in Theorem 3.1, offers the possibility to construct wave functions of the hierarchy corresponding to various spaces of boundary values on circles around the origin. In [5] one can find the construction for the L^2-boundary values on the unit circle.In a forthcoming paper we will treat various examples.

References

[1] B. B. Khadomtsev, V. I. Petviashvilii, “On the stability of solitary waves in weakly dispersing media”, *Sov. Phys. Doklady*, **15** (1970), 539–541.

[2] G. F. Helminck, A. G. Helminck, E. A. Panasenko, “Integrable deformations in the algebra of pseudo differential operators from a Lie algebraic perspective”, *Theoret. and Math. Phys.*, **174**:1 (2013), 134–153.

[3] G. Wilson, “Commuting flows and conservation laws for Lax equations”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **86**:1 (1979), 131–143.

[4] G. F. Helminck, A. G. Helminck, E. A. Panasenko, “Cauchy problems related to integrable deformations of pseudo differential operators”, *Journal of Geometry and Physics*, **85** (2014), 196–205.

[5] G. F. Helminck, E. A. Panasenko, “Geometric solutions of the strict KP hierarchy”, *Theoret. and Math. Phys.*, **198**:3 (2019), 48–68.

Information about the authors

Gerard F. Helminck, Professor. Korteweg–de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Amsterdam, the Netherlands.
E-mail: g.f.helminck@uv.nl
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7022-5852

Информация об авторах

Хельминк Герард Франциск, профессор. Математический институт Кортевега–де Фриза, Университет г. Амстердам, Амстердам, Нидерланды. E-mail: g.f.helminck@uv.nl
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7022-5852

Elena A. Panasenko, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: panlena_t@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4737-9906

Панасенко Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: panlena_t@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4737-9906

There is no conflict of interests.

Конфликт интересов отсутствует.

Corresponding author:
Elena A. Panasenko
E-mail: panlena_t@mail.ru

Для контактов:
Панасенко Елена Александровна
E-mail: panlena_t@mail.ru

Received 26.07.2020
Reviewed 02.09.2020
Accepted for press 09.09.2020

Поступила в редакцию 26.07.2020
Поступила после рецензирования 02.09.2020
Принята к публикации 09.09.2020